Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Mitglied der
Leibniz
Leibniz
Gemeinschaft

Oberwolfach Preprints

OWP 2018 - 26

MICHEL BALAZARD AND BRUNO MARTIN

Sur le Minimum de la Fonction de Brjuno

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH
Oberwolfach Preprints (OWP) ISSN 1864-7596

Oberwolfach Preprints (OWP)

The MFO publishes a preprint series **Oberwolfach Preprints (OWP)**, ISSN 1864-7596, which mainly contains research results related to a longer stay in Oberwolfach, as a documentation of the research work done at the MFO. In particular, this concerns the Research in Pairs-Programme (RiP) and the Oberwolfach-Leibniz-Fellows (OWLF), but this can also include an Oberwolfach Lecture, for example.

A preprint can have a size from 1 - 200 pages, and the MFO will publish it on its website as well as by hard copy. Every RiP group or Oberwolfach-Leibniz-Fellow may receive on request 30 free hard copies (DIN A4, black and white copy) by surface mail.

The full copyright is left to the authors. With the submission of a manuscript, the authors warrant that they are the creators of the work, including all graphics. The authors grant the MFO a perpetual, non-exclusive right to publish it on the MFO's institutional repository.

In case of interest, please send a **pdf file** of your preprint by email to *rip@mfo.de* or *owlf@mfo.de*, respectively. The file should be sent to the MFO within 12 months after your stay as RiP or OWLF at the MFO.

There are no requirements for the format of the preprint, except that the introduction should contain a short appreciation and that the paper size (respectively format) should be DIN A4, "letter" or "article".

On the front page of the hard copies, which contains the logo of the MFO, title and authors, we shall add a running number (20XX – XX). Additionally, each preprint will get a Digital Object Identifier (DOI).

We cordially invite the researchers within the RiP or OWLF programme to make use of this offer and would like to thank you in advance for your cooperation.

Imprint:

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH (MFO)
Schwarzwaldstrasse 9-11
77709 Oberwolfach-Walke
Germany

Tel +49 7834 979 50
Fax +49 7834 979 55
Email admin@mfo.de
URL www.mfo.de

The Oberwolfach Preprints (OWP, ISSN 1864-7596) are published by the MFO.

DOI 10.14760/OWP-2018-26

Sur le minimum de la fonction de Brjuno

Michel Balazard et Bruno Martin

30 octobre 2018

Abstract

The Brjuno function attains a strict global minimum at the golden section.

Keywords

Gauss transformation, Brjuno function, Golden section
MSC classification : 26D07, 11A55

La transformation de Gauss,

$$\alpha(x) = \{1/x\},$$

où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t, est bien définie sur l'ensemble

$$X =]0,1[\setminus \mathbb{Q},$$

et à valeurs dans X. On peut donc considérer ses itérées successives, définies par les relations $\alpha_0(x) = x$ et $\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k\bigl(\alpha(x)\bigr)$ pour $k \geqslant 0$, et les produits

$$\beta_k(x) = \prod_{j=0}^{k} \alpha_j(x) \quad (k \in \mathbb{N},\, x \in X),$$

avec la convention supplémentaire $\beta_{-1}(x) = 1$. Comme α est continue sur X, les α_k et les β_k le sont également.

La fonction de Brjuno est alors définie, pour tout $x \in X$, comme la somme, éventuellement égale à $+\infty$, de la série à termes positifs

$$\Phi(x) = \sum_{k \geqslant 0} \beta_{k-1}(x) \ln\bigl(1/\alpha_k(x)\bigr).$$

Les points de convergence sont appelés *nombres de Brjuno* ; nous noterons $\mathcal{B}$ leur ensemble. La fonction et les nombres de Brjuno interviennent dans la théorie des systèmes dynamiques (cf. par exemple [2], [3], [5]). L'ensemble $\mathcal{B}$ est de mesure 1, et donc dense dans $[0,1]$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ des nombres de Brjuno est stable par α. La fonction Φ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \ln(1/x) + x\Phi\big(\alpha(x)\big) \quad (x \in \mathcal{B}), \tag{1}$$

et, plus généralement,

$$\Phi(x) = \Phi_K(x) + \beta_K(x)\Phi\big(\alpha_{K+1}(x)\big) \quad (K \in \mathbb{N},\, x \in \mathcal{B}), \tag{2}$$

où Φ_K désigne la somme partielle

$$\Phi_K(x) = \sum_{k=0}^{K} \beta_{k-1}(x) \ln\big(1/\alpha_k(x)\big).$$

Les fonctions Φ_K sont définies et continues sur X.

Dans l'article [4], Rivoal émet plusieurs conjectures sur les valeurs extrémales de séries diophantiennes, dont certaines sont proches de la fonction de Brjuno. Le théorème suivant fournit la réponse à une question posée aux auteurs par Rivoal, concernant la fonction Φ elle-même.

Théorème *Soit $\theta = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,618\ldots$ le nombre d'or. Pour tout nombre de Brjuno $x \neq \theta$, on a $\Phi(x) > \Phi(\theta)$.*

La démonstration de notre théorème s'appuie sur cinq propositions auxiliaires.

Proposition 1 *Soit r un nombre rationnel, élément du segment $[0,1]$. On a alors*

$$\Phi(x) \to \infty \quad (x \to r,\, x \in \mathcal{B}).$$

Démonstration

On a $\Phi(x) \geqslant \Phi_0(x) = \ln 1/x$, donc le résultat est vrai si $r = 0$. On a

$$\Phi(x) = \ln 1/x + x\Phi\big(\alpha(x)\big) \geqslant \frac{1}{2}\Phi(1/x - 1) \quad (1/2 < x < 1),$$

donc le résultat est aussi vrai si $r = 1$.

Si r est un nombre rationnel de $]0,1[$, écrivons r sous forme d'une fraction continue finie,

$$r = [0; a_1, \ldots, a_k] \quad (k \geqslant 1,\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*,\, a_k \geqslant 2).$$

L'application $\varphi : t \mapsto [0; a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t]$ est un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur un certain voisinage de r dans $]0,1[$.

Pour $t \in X$, ce qui équivaut à $\varphi(t) \in X$, on a

$$\alpha_k\big(\varphi(t)\big) = t \quad ; \quad \alpha_k\big(\varphi(-t)\big) = 1 - t,$$

et $\beta_{k-1}\big(\varphi(\pm t)\big)$ est minorée par une constante positive (dépendant de r, cf. [1], (18)-(19), p. 199) pour $t \in X$. Comme

$$\Phi\big(\varphi(t)\big) \geqslant \beta_{k-1}\big(\varphi(t)\big)\Phi\Big(\alpha_k\big(\varphi(t)\big)\Big) \quad (t \in]-1,1[\setminus\mathbb{Q}),$$

le résultat général découle des cas particuliers $r = 0, 1$. $\square$

Posons maintenant

$$C = \inf_{x\in\mathcal{B}} \Phi(x).$$

On a $0 \leqslant C < \infty$, car Φ est à valeurs $\geqslant 0$ et $\mathcal{B}$ n'est pas vide.

Proposition 2 *La borne inférieure C est le minimum de la fonction de Brjuno sur $\mathcal{B}$: il existe $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$.*

Démonstration

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que

$$\Phi(x_n) \to C \quad (n \to \infty).$$

En remplaçant éventuellement cette suite par une de ses sous-suites, nous pouvons supposer que la suite (x_n) est elle-même convergente, vers une limite $r \in [0, 1]$. La proposition 1 et l'hypothèse de convergence vers C de la suite $\Phi(x_n)$ entraînent alors que r est irrationnel. Nous allons montrer que $r \in \mathcal{B}$ et que $\Phi(r) = C$.

Soit $K \in \mathbb{N}$. Par définition de Φ on a $\Phi(x_n) \geqslant \Phi_K(x_n)$ pour tout n. La continuité de Φ_K en tout point irrationnel entraîne donc, par passage à la limite, l'inégalité $C \geqslant \Phi_K(r)$. Comme K est arbitraire, cela prouve que r est un nombre de Brjuno, et que $C \geqslant \Phi(r)$. Comme on a aussi, par définition de C, l'inégalité inverse $\Phi(r) \geqslant C$, on en déduit l'égalité $C = \Phi(r)$. Cette borne inférieure est donc bien un minimum. $\square$

Proposition 3 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a*

$$C = \Phi(r) \geqslant \frac{\Phi_K(r)}{1 - \beta_K(r)}.$$

Démonstration

En appliquant la relation (2) à $x = r$, nous obtenons

$$C = \Phi(r) = \Phi_K(r) + \beta_K(r)\Phi\big(\alpha_{K+1}(r)\big) \geqslant \Phi_K(r) + C\beta_K(r),$$

par définition de C. L'assertion en résulte. $\square$

Proposition 4 *Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Phi(\theta) = \frac{\Phi_K(\theta)}{1 - \beta_K(\theta)}$$

Démonstration

En effet, en appliquant la relation (2) à $x = \theta$, nous obtenons

$$\Phi(\theta) = \Phi_K(\theta) + \beta_K(\theta)\Phi\big(\alpha_{K+1}(\theta)\big) = \Phi_K(\theta) + \beta_K(\theta)\Phi(\theta),$$

puisque θ est point fixe de α. $\square$

Proposition 5 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. On a $r \geqslant \theta$.*

Démonstration

D'après les propositions 3 et 4 avec $K = 0$, et la définition de C, on a

$$\frac{\Phi_0(\theta)}{1 - \beta_0(\theta)} = \Phi(\theta) \geqslant C = \Phi(r) \geqslant \frac{\Phi_0(r)}{1 - \beta_0(r)}\cdot$$

Or, pour $0 < x < 1$,

$$\frac{\Phi_0(x)}{1 - \beta_0(x)} = \frac{\ln 1/x}{1 - x} = \int_0^1 \frac{du}{(1-u)x + u},$$

est une fonction strictement décroissante de x, donc $\theta \leqslant r$. $\square$

Au vu de la proposition 2, l'énoncé suivant est équivalent à celui du théorème.

Proposition 6 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. On a $r = \theta$.*

Démonstration

D'après les propositions 3 et 4 avec $K = 1$, et la définition de C, on a

$$\frac{\Phi_1(\theta)}{1 - \beta_1(\theta)} = \Phi(\theta) \geqslant C = \Phi(r) \geqslant \frac{\Phi_1(r)}{1 - \beta_1(r)}\cdot \tag{3}$$

Pour $1/2 < x < 1$, posons

$$f(x) = \frac{\Phi_1(x)}{1 - \beta_1(x)} = \frac{\ln 1/x + x \ln 1/\alpha(x)}{1 - (1 - x)} = \frac{\ln 1/x}{x} + \ln \frac{x}{1 - x},$$

puisque $\alpha(x) = (1 - x)/x$ pour $1/2 < x < 1$.

On a

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2x - 1}{x^2(1 - x)},$$

fonction qui a le signe de

$$g(x) = 2x - 1 + (1 - x)\ln x.$$

La fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et $g(0,61) = 0,027\ldots > 0$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[\theta, 1[$. La relation (3) et la proposition 5 entraînent donc l'égalité $r = \theta$. $\square$

Remerciements

Nous remercions Tanguy Rivoal d'avoir suscité et encouragé le présent travail. Cette recherche a été rendue possible par le programme *Research in pairs* du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Nous remercions cette institution pour les conditions de travail idéales dont nous avons bénéficié.

Références

[1] M. Balazard et B. Martin – « Comportement local moyen de la fonction de Brjuno », *Fundamenta Mathematicae* **218** (2012), p. 193–224.

[2] X. Buff et A. Cheritat – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Annals of Maths.* **164** (2006), p. 265–312.

[3] S. Marmi, P. Moussa et J.-C. Yoccoz – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), p. 265–293.

[4] T. Rivoal – « Extremality properties of some Diophantine series », *Experiment. Math.* **19** (2010), p. 481–494.

[5] J.-C. Yoccoz – *Petits diviseurs en dimension 1.*, Astérisque, vol. 231, Société Math. de France, Paris, 1995.

BALAZARD, Michel
Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France
Adresse électronique : balazard@math.cnrs.fr

MARTIN, Bruno
ULCO, LMPA, Calais, France
Adresse électronique : Bruno.Martin@univ-littoral.fr