

# Zopfgruppen, die Yang–Baxter-Gleichung und Unterfaktoren

---

Gandalf Lechner

Die Yang–Baxter-Gleichung ist eine faszinierende Gleichung, die in vielen Gebieten der Physik und der Mathematik auftritt und die am besten diagrammatisch dargestellt wird. Dieser Snapshot schlägt einen weiten Bogen vom Zöpfeflechten über die Yang–Baxter-Gleichung bis hin zur aktuellen Forschung zu Systemen von unendlichdimensionalen Algebren, die wir „Unterfaktoren“ nennen.

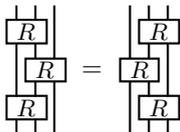
## 1 Einleitung

Was haben Eiskristalle, geflochtene Zöpfe, Quantencomputer und von-Neumann-Algebren gemeinsam? Die Antwort verbirgt sich in einer mit all diesen Themen verbundenden mathematischen Struktur, der sogenannten *Yang–Baxter-Gleichung*. Diese Gleichung ist nach Chen Ning Yang und Rodney Baxter benannt, die sie unabhängig voneinander bei ihren Forschungen zur Teilchenstreuung in der Quantenmechanik beziehungsweise in der statistischen Physik bei der Untersuchung von Kristallen entdeckten.

Es erscheint erstaunlich, dass zwei so unterschiedliche Themen auf ein und dieselbe mathematische Gleichung führen sollten. Aber die Yang–Baxter-Gleichung und ihre Varianten spielen nicht nur in diesen, sondern in noch vielen weiteren Gebieten eine wichtige Rolle. Einige weitere Beispiele sind die Knotentheorie, bestimmte Modelle der Quantenfeldtheorie, Konfigurationen von Widerständen

in einem elektrischen Netzwerk und Unterfaktoren (gewisse Paare von unendlichdimensionalen Algebren, in denen das *Kommutativgesetz*  $xy = yx$  maximal verletzt ist). Die Yang–Baxter-Gleichung hat sogar die Entstehung einer ganzen Fachrichtung in der Mathematik (Quantengruppen) maßgeblich beeinflusst und wird heutzutage aus ganz unterschiedlichen Gesichtspunkten studiert.

An diesem Punkt wäre es wohl angebracht, diese *Yang–Baxter-Gleichung* einmal hinzuschreiben. Hier ist sie:



Viel mehr, als dass sie eine Gleichung für ein in ein Kästchen geschriebenes „ $R$ “ ist und dass auf jeder Seite der Gleichung  $R$  dreimal vorkommt, ist hier vorerst nicht zu erkennen. Wie diese Grafik eine präzise mathematische Gleichung kodiert und wieso die grafische Darstellung viel besser als eine Formel ist, wird im Laufe dieses Snapshots erklärt.

Der Plan ist dabei der folgende: Zuerst sprechen wir in Abschnitt 2 über Zöpfe und stoßen dabei auf eine interessante mathematische Struktur, die sogenannte Zopfgruppe. In Abschnitt 3 übersetzen wir die abstrakte Zopfgruppe in konkrete Objekte, nämlich (mehrdimensionale) Tabellen. Um diese Übersetzung ohne Widersprüche vornehmen zu können, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein. Die Yang–Baxter-Gleichung wird sich als eine wesentliche Bedingung herausstellen.

Die Lösungen dieser Gleichung sind nur unvollständig verstanden. Im letzten Teil, Abschnitt 4, geht es um die Verbindung zu dem Oberwolfach Workshop „Subfactors and Applications“, auf dem dieser Snapshot beruht, und wie höhere Mathematik zum Einsatz gebracht werden kann, um die Lösungen der Yang–Baxter-Gleichung zu studieren.

## 2 Zopfgruppen

Eine gute Vorbereitung, um die Yang–Baxter-Gleichung zu verstehen, ist es, sich die Haare zu kämmen. Beim Haarekämmen ist man üblicherweise daran interessiert, die Haare komplett zu entflechten, also ohne irgendwelche Überkreuzungen alle parallel nebeneinander herunterhängen zu lassen, was mit einem ausreichend feinen Kamm und genug Geduld prinzipiell auch immer möglich ist.

Mathematisch gesehen ist Haarekämmen also nicht sehr interessant. Spannender wird es, wenn wir  $n$  Haare (oder Stränge) betrachten, die an ihrem oberen Ende (also am Kopf) aber auch an ihrem unteren Ende fixiert sind und von oben nach unten verlaufen. Dabei können die Stränge auf verschiedenste

Weisen verflochten sein; Abbildung (A1) zeigt einige einfache Beispiele mit  $n = 3$  und  $n = 4$  Strängen statt der üblicherweise  $n \approx 100000$  Haare auf einem Menschenkopf.

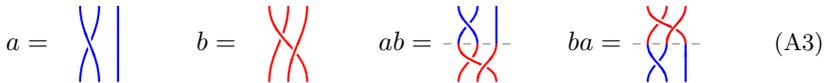


In diesen Diagrammen deuten die Lücken an den Überkreuzungspunkten an, welcher Strang oben und welcher unten liegt. In leichter Idealisierung stellen wir uns die Stränge dabei als beliebig elastisch und unzerreißbar vor. Wir betrachten zwei Zöpfe als identisch, wenn wir sie durch Einsatz von Fingern und Kamm, also durch Dehnen, Auseinanderfummeln oder Verwickeln (aber nicht Zerschneiden!) ineinander überführen können – wir sagen in diesem Fall auch, dass die Zöpfe durch *stetiges Deformieren* der Stränge ineinander übergehen. In diesem Sinne gelten zum Beispiel die drei Gleichungen



Da die Stränge an der Ober- und Unterseite des Diagramms fixiert sind, gibt es aber auch unendlich viele unterschiedliche Zöpfe, die nicht durch Kämmen ineinander transformiert werden können. Wenn viele Stränge oder viele Überkreuzungen involviert sind, ist es nicht mehr leicht zu erkennen, ob ein Zopf glatt gekämmt werden kann wie in der ersten Gleichung in (A2) oder ob dies unmöglich ist. Einen Algorithmus zu finden, der diese Frage entscheidet, ist ein erstes mathematisches Problem mit Zöpfen.<sup>[1]</sup>

Für diese und andere Fragen ist es wichtig, die Eigenschaften der Menge aller Zöpfe mit  $n$  Strängen näher kennenzulernen, die üblicherweise mit  $B_n$  bezeichnet wird ( $B$  für das englische „braids“). Die reichhaltige mathematische Struktur von  $B_n$  beruht wesentlich darauf, dass zwei Zöpfe  $a$  und  $b$ , also zwei beliebige Diagramme mit je  $n$  Strängen, zu einem neuen, kurz  $ab$  genannten Zopf mit ebenfalls  $n$  Strängen zusammengefügt werden können. Die das Produkt  $ab$  definierende Vorschrift ist, die Unterseite von  $a$  mit der Oberseite von  $b$  zu verkleben und das Ergebnis auf die Länge von  $a$  und  $b$  zusammenzustauen:



Die hier verwendeten Farben und gestrichelten Trennungslinien dienen nur der Veranschaulichung und werden im Folgenden weggelassen. Im Allgemeinen spielt

---

[1] Dieses Problem ist als „Wortproblem“ bekannt. Woher die Bezeichnung „Wortproblem“ kommt, wird nach der Abbildung (A5) erklärt werden. Für eine Lösung siehe zum Beispiel [4].

die Reihenfolge in der wir einzelne Zöpfe zu größeren Zöpfen verkleben eine wichtige Rolle. Zum Beispiel gilt in (A3):  $ab \neq ba$ . Sehen Sie warum? <sup>[2]</sup>

Abgesehen von dieser Verletzung des Kommutativgesetzes gibt es aber einige Analogien zur Multiplikation von Zahlen: Analog zu der Zahl 1 gibt es einen speziellen Zopf  $e$  in  $B_n$ , der  $be = eb = b$  für alle Zöpfe  $b \in B_n$  erfüllt: Der Zopf  $e$  besteht aus  $n$  parallelen Strängen ohne irgendwelche Überkreuzungen (wie auf der rechten Seite der ersten Gleichung in (A2) oder der dritten Gleichung in (A4)). Weiterhin ist das Produkt von Zöpfen *assoziativ*, das heißt, dass  $(ab)c = a(bc)$  für alle Zöpfe  $a, b, c$  gilt. Schließlich gibt es zu jedem Zopf  $b$  einen *inversen Zopf*, der mit  $b^{-1}$  bezeichnet wird. Der Zopf  $b^{-1}$  hat die Eigenschaft, dass er  $b$  durch Produktbildung „entknotet“: Dies wird durch folgende Formel ausgedrückt  $bb^{-1} = e = b^{-1}b$ . Zum Beispiel:

$$b = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad b^{-1} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad bb^{-1} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = e \quad (\text{A4})$$

Da eine solche Struktur in der Mathematik als *Gruppe* bezeichnet wird, sprechen wir von der *Zopfgruppe*  $B_n$  von Zöpfen mit  $n$  Strängen.

Zöpfe, die nur einen einzigen Überkreuzungspunkt haben, also zwei nebeneinander liegende Stränge einmal überkreuzen, werden *elementar* genannt. In  $B_n$  gibt es  $2(n-1)$  elementare Zöpfe, die  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  und  $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$  heißen. Nummerieren wir die Stränge von links nach rechts mit  $1, 2, \dots, n$  durch, so legt  $\sigma_k$  Strang  $k$  über Strang  $k+1$  und  $\sigma_k^{-1}$  Strang  $k$  unter Strang  $k+1$ . Zum Beispiel zeigt Abbildung (A3)  $a = \sigma_1$ . Durch stetiges Deformieren von Strängen kann man einsehen, dass jeder Zopf in  $B_n$  als Produkt von elementaren Zöpfen geschrieben werden kann. Zum Beispiel

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2. \quad (\text{A5})$$

Man kann sich Zöpfe also als beliebige „Wörter“ vorstellen, in denen die „Buchstaben“ die elementaren Zöpfe  $\sigma_k$  und  $\sigma_k^{-1}$  sind, zum Beispiel  $\sigma_1 \sigma_{10} \sigma_8^{-1} \sigma_8^{-1} \sigma_4$ . Ob sich ein solches „Wort“ zu dem trivialen Zopf  $e$  vereinfachen lässt, ist Gegenstand des „Wortproblems“ in Fußnote 1.

Die elementaren Zöpfe  $\sigma_k$  eignen sich gut für einen algebraischen Zugang zur Zopfgruppe. Um mit ihnen zu rechnen, muss man nur beachten, dass sie die

---

<sup>[2]</sup> Tipp: In diesem Beispiel genügt es, die Endpunkte der einzelnen Stränge zu betrachten.

folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\sigma_k \sigma_k^{-1} = e = \sigma_k^{-1} \sigma_k, \quad (\text{Z1})$$

$$\sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k \quad \text{falls } l \neq k \pm 1, \quad (\text{Z2})$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}. \quad (\text{Z3})$$

Diese Beziehungen sind grafisch leicht zu verifizieren. In Abbildung (A2) sind von links nach rechts die drei Gleichungen  $\sigma_1 \sigma_1^{-1} = e$  (links),  $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$  (Mitte) und  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$  (rechts) dargestellt.

Die Gleichungen (Z1–3) fassen die gesamte mathematische Struktur von  $B_n$  zusammen: Emil Artin (1898–1962) hat schon 1925 gezeigt, dass es außer diesen keine weiteren unabhängigen Relationen in der Zopfgruppe gibt [1]. Das heißt, dass alle Gleichungen, die in  $B_n$  gelten, auf die grundlegenden Gleichungen (Z1–Z3) zurückführbar sind: Zum Beispiel gilt die Beziehung  $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ , aber dies ist keine wirklich neue Beziehung, sondern eine Konsequenz von (Z3) (Übung). Man kann also statt mit Diagrammen genauso gut mit den drei Gleichungen (Z1–Z3) arbeiten; je nach Fragestellung ist die grafische oder algebraische Sichtweise günstiger.

Die algebraische Sichtweise auf die Zopfgruppe spielt bei einigen Anwendungen eine zentrale Rolle. Da sich die Gleichungen (Z1–Z3) gut auf einem Computer implementieren lassen, gibt es Kryptographieprotokolle, die auf der Zopfgruppe basieren [6]. Sichere Kryptographieanwendungen sollen schwer zu knacken sein, was dadurch gewährleistet wird, dass zum Entschlüsseln ohne Schlüssel ein sehr rechenaufwendiges mathematisches Problem gelöst werden muss. Anstelle von weitverbreiteten Verfahren, die auf der Schwierigkeit des Faktorisierungsproblems beruhen (finde die Faktorisierung einer großen natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren), wurde im Kontext von Zopfgruppen das sogenannte Konjugationsproblem vorgeschlagen. (Gegeben  $a, b \in B_n$ , entscheide, ob es  $x \in B_n$  gibt, so dass  $a = xbx^{-1}$  gilt.)

Eine andere Anwendung kommt aus der Physik, in der Zopfgruppen in der Beschreibung von Elementarteilchen auftreten, die sich nur in einer zweidimensionalen Ebene bewegen können. Eine Beschreibung einer Menge von Elementarteilchen  $t_1, \dots, t_n$  muss der Tatsache Rechnung tragen, dass Elementarteilchen der gleichen Sorte (z.B. Elektronen) nicht voneinander unterscheidbar sind, eine Permutation der Teilchen also keinerlei beobachtbaren Effekt haben kann. Während dies für Teilchen in drei Dimensionen durch die Permutationsgruppe formuliert wird, benötigt man in zwei Dimensionen stattdessen die Zopfgruppe.

Auch auf rein mathematischer Ebene hält die Zopfgruppe viele unbeantwortete Fragen bereit, zum Beispiel im Zusammenhang mit Knotentheorie und sogenannten Darstellungen von Zöpfen durch konkretere mathematische Objekte, wie wir sie auch im nächsten Abschnitt diskutieren werden.

## Quiz 1:

- Finden Sie die inversen Zöpfe zu den in Abbildung (A1) und (A2) gezeigten Zöpfen.
- Finden Sie einen von  $e$  verschiedenen Zopf  $z$  in  $B_3$ , der die Eigenschaft  $zx = xz$  für alle Zöpfe  $x$  in  $B_3$  hat. (Tipp: Finden Sie zuerst einen Zopf  $\delta$ , der  $\delta\sigma_1 = \sigma_2\delta$  und  $\delta\sigma_2 = \sigma_1\delta$  erfüllt. Betrachten Sie dann  $z = \delta\delta$ .)

## 3 Tensordiagramme und die Yang–Baxter-Gleichung

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie Zöpfe durch konkretere mathematische Objekte dargestellt werden können, das heißt, wir suchen Objekte, die Gleichungen analog zu (Z1–Z3) erfüllen. „Darstellen“ ist hier ein mathematischer Fachbegriff, den wir im Folgenden an einem Beispiel diskutieren werden. Das Studium von solchen Darstellungen ist keineswegs auf die Zopfgruppe beschränkt: Wenn eine Mathematikerin auf eine Gruppe trifft, interessiert sie sich meist nicht nur für die Gruppe an sich, sondern auch für Realisierungen der Relationen in der Gruppe durch konkrete Objekte, was von großer Bedeutung sowohl in der reinen Mathematik als auch in Anwendungen ist.

Wenn wir die Zopfgruppe  $B_n$  betrachten, können wir das Studium von Darstellungen auf verschiedene Weisen motivieren: Zum einen haben Zöpfe nur *mehrdeutige* Realisierungen als Zopfdiagramme, das heißt jedem Zopf entsprechen unendlich viele unterschiedliche Diagramme (siehe (A2) für Beispiele). In einer Darstellung hingegen wird jedem Zopf  $b$  ein *eindeutiges* Objekt zugeordnet. Diese Objekte werden sogenannte *Tensoren* sein, die wir uns als mehrdimensionale Tabellen von Zahlen vorstellen können.

Weiterhin haben die speziellen Darstellungen, die wir im folgenden besprechen werden, viele Anwendungen, insbesondere in der Quantenphysik. Dort werden beobachtbare Größen eines physikalischen Systems (etwa Energie, Impuls, Spin, ...) im einfachsten Fall durch Matrizen realisiert, die sich wiederum zu Tensoren zusammensetzen lassen. Konkret finden die weiter unten aufgeführten Darstellungen in gewissen Modellen von sogenannten topologischen Quantencomputern Anwendung.

Genug der Vorrede! Was sollen also diese mehrdimensionalen Tabellen (Tensoren) sein?

Betrachten wir zuerst eine übliche zweidimensionale quadratische Tabelle  $T$  mit  $d$  Zeilen und  $d$  Spalten – auch  $d \times d$ -*Matrix* genannt:

$$\begin{array}{c} \boxed{T} \\ | \end{array} = T = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \dots & T_d^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & \dots & T_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^d & T_2^d & \dots & T_d^d \end{pmatrix}$$

Um einen bestimmten Eintrag aus einer solchen Tabelle abzulesen, muss man die Zeilen- und Spaltennummer des Eintrags kennen: Der Eintrag  $T_j^i$  ist die Zahl, die in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  steht. Da es  $d$  Zeilen und Spalten gibt, wobei  $d = 1, 2, \dots$  ein von uns gewählter Parameter ist, können sowohl  $i$  als auch  $j$  unabhängig voneinander die Werte  $1, 2, \dots, d$  annehmen. Die Grafik auf der linken Seite ist ein Tensordiagramm, in dem die obere Linie von  $T$  den oberen Index (Zeilenindex) und die untere Linie den unteren Index (Spaltenindex) symbolisiert – solche Diagramme werden sich bald als sehr hilfreich herausstellen.

Stellen wir uns nun eine mehrdimensionale Tabelle  $T$  vor, in der Zahlen gespeichert sind, die nicht nur von zwei Parametern  $i$  und  $j$  abhängen, sondern von  $2n$  Parametern  $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ , wobei jeder dieser Parameter die Werte  $1, 2, \dots, d$  annehmen kann. Dann können wir die insgesamt  $d^{2n}$  Einträge von  $T$  als  $T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$  notieren. So eine  $2n$ -dimensionale Tabelle lässt sich nur schlecht auf Papier aufschreiben, passt aber sehr gut zu Tensordiagrammen



mit  $n$  oberen und  $n$  unteren Linien, wobei die oberen Linien den oberen Indizes  $i_1, \dots, i_n$  und die unteren Linien den unteren Indizes  $j_1, \dots, j_n$  von  $T$  entsprechen (jeweils von links nach rechts sortiert). Wir nennen eine solche Tabelle einen *Tensor der Größe  $n$* .

Im Folgenden ist es unser Ziel, eine Übersetzungsvorschrift zu definieren, die beliebige Zöpfe  $b$  mit  $n$  Strängen in Tensoren  $T(b)$  der Größe  $n$  übersetzt.<sup>[3]</sup> Um das zu erreichen, werden wir insbesondere zwei spezielle Tensoren  $R$  und  $R^*$  der Größe zwei benötigen, um Über- und Unterkreuzungspunkte der Zopfdiagramme darzustellen:

---

[3] Wir werden gleich sehen, dass wir für die Definition des Tensors  $T(b)$  noch einen speziellen Tensor  $R$  der Größe zwei fixieren müssen. In der Übersetzungsvorschrift werden wir deswegen im folgenden auch  $T_R(b)$  statt  $T(b)$  schreiben um diese Abhängigkeit zum Ausdruck zu bringen.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} | \\ | \\ \times \\ | \\ | \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{R} \\ | \\ | \end{array} \\
 \begin{array}{c} | \\ | \\ \times \\ | \\ | \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{R^*} \\ | \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{Y} \\ | \\ | \end{array}
 \end{array}$$

Da ein Unterkreuzungspunkt das Spiegelbild eines Überkreuzungspunktes an einer horizontalen Linie ist, sollte das auch für  $R$  und  $R^*$  gelten. Um das zu erreichen, definieren wir  $R^*$  durch Vertauschung der oberen mit den unteren Indizes von  $R$ , nämlich<sup>[4]</sup>  $(R^*)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ . Insbesondere ist  $R^*$  durch  $R$  eindeutig festgelegt.

Die wesentlichen Elemente eines Zopfes sind seine Kreuzungspunkte, die durch horizontales und vertikales Verbinden der Stränge ein Zopfdiagramm definieren. Um ein entsprechendes Tensordiagramm aus  $R$  und  $R^*$  zu erhalten, brauchen wir nun Regeln, um Tensoren sowohl horizontal als auch vertikal zusammenzufügen. Genau das liefert der folgende grafische Kalkül, der auch in der Knotentheorie Anwendung findet [5].

Die **horizontale Komposition** besteht grafisch einfach aus Nebeneinander-schreiben von zwei Tensordiagrammen. Schreiben wir ein Tensordiagramm  $T$  mit  $n$  oberen/unteren Linien (also der Größe  $n$ ) links neben ein Tensordiagramm  $S$  der Größe  $m$ , ergibt sich ein Tensordiagramm mit insgesamt  $n + m$  oberen/unteren Linien. Der zugehörige Tensor wird als  $T \otimes S$  bezeichnet, seine Einträge sind definiert als  $(T \otimes S)_{j_1 \dots j_n b_1 \dots b_m}^{i_1 \dots i_n a_1 \dots a_m} = T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} \cdot S_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_m}$ . Diese horizontale Komposition erlaubt uns, ein aus nebeneinander stehenden Kreuzungspunkten bestehendes Zopfdiagramm in einen Tensor zu übersetzen. Zum Beispiel gilt folgende Übersetzung eines einfachen Zopfes in  $B_4$  in einen Tensor der Größe vier:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} | \\ | \\ \times \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \times \\ | \\ | \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{R} \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{R^*} \\ | \\ | \end{array} = R \otimes R^*
 \end{array}$$

Um auch Zöpfe wie zum Beispiel  $XII$  in Tensoren zu übersetzen, brauchen wir noch einen Tensor der Größe eins für eine vertikale Linie ohne Überkreuzungen. Dies ist die „Einheitsmatrix“  $I$ ,

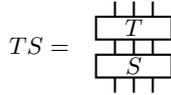
$$\begin{array}{ccc}
 | & \longrightarrow & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

---

<sup>[4]</sup> Im Allgemeinen können die Einträge unserer Tensoren auch komplexe Zahlen sein. In diesem Fall ist die Definition von  $R^*$  um eine komplexe Konjugation aller Einträge zu ergänzen.

die auf der Diagonale Einsen und sonst nur Nullen als Einträge hat. Das heißt also:  $I_j^i = 1$ , falls  $i = j$ , und  $I_j^i = 0$ , falls  $i \neq j$ .

Für die **vertikale Komposition** betrachten wir zwei Tensoren  $T$  und  $S$  der Größe  $n$  und definieren ein Produkt  $TS$ , das wieder ein Tensor der Größe  $n$  ist. Wir machen das analog zu dem Produkt von Zöpfen, indem die Unterseite des Diagramms von  $T$  mit der Oberseite des Diagramms von  $S$  verklebt wird. Haben  $T$  und  $S$  zum Beispiel Größe drei, so ergibt sich



In diesem Diagramm stimmen die unteren Linien von  $T$  mit den oberen Linien von  $S$  überein. Wir definieren deshalb  $TS$  als den Tensor, dessen Einträge  $(TS)_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}$  aus den Produkten  $T_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_n} S_{j_1 \dots j_n}^{k_1 \dots k_n}$  (untere Indizes von  $T$  gleich obere Indizes von  $S$ ) gebildet werden, und zwar durch Summation über alle  $d^n$  Möglichkeiten  $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, d\}$ . In einer Formel ausgedrückt, definieren wir den Tensor  $TS$  der Größe  $n$  durch

$$(TS)_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d T_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_n} S_{j_1 \dots j_n}^{k_1 \dots k_n}.$$

Um ein Beispiel zu geben, nehmen wir  $n = 1$  (nur ein oberer/unterer Index) und  $d = 2$ , so dass  $T$  und  $S$   $(2 \times 2)$ -Matrizen sind. Dann ist unser Produkt

$$\begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 \\ T_1^2 & T_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 S_1^1 + T_2^1 S_2^1 & T_1^1 S_2^1 + T_2^1 S_2^2 \\ T_1^2 S_1^1 + T_2^2 S_2^1 & T_1^2 S_2^1 + T_2^2 S_2^2 \end{pmatrix},$$

was Ihnen möglicherweise als *Matrixprodukt* bekannt ist. Dies ist wieder ein Produkt, für das das Kommutativgesetz *nicht* gilt, das heißt im Allgemeinen  $TS \neq ST$ . Man prüft leicht nach, dass  $AI = A = IA$  für alle Matrizen  $A$  gilt, was die grafische Notation für  $I$  (der entsprechende Strang hat keine Box) rechtfertigt.

Dies beendet unsere Definition der Darstellung  $b \mapsto T_R(b)$  von Zöpfen in  $B_n$  durch Tensoren  $T_R(b)$  der Größe  $n$ . Wie schon oben bemerkt, deutet die Bezeichnung  $T_R$  hier an, dass die Abbildung  $b \mapsto T_R(b)$  ganz wesentlich von der Wahl von  $R$  abhängt. Sobald  $R$  festgelegt ist, können wir jeden Zopf  $b$  (mit einer beliebigen Anzahl von Strängen  $n$ ) als einen Tensor  $T_R(b)$  der Größe  $n$  auffassen. Als ein Beispiel betrachten wir den Zopf  $b$  aus Abbildung (A4):

$$b = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{R} \\ \boxed{R^*} \end{array} = (R \otimes I)(I \otimes R^*) = T_R(b)$$

Alle  $d^6$  Einträge von  $T_R(b)$  lassen sich durch die beschriebenen Kompositionsregeln und die Einträge von  $R$  berechnen. Um zu prüfen, dass Sie diese Regeln verinnerlicht haben, können Sie in diesem Beispiel nachrechnen, dass für  $d = 3$

$$T_R(b)_{211}^{123} = R_{21}^{12} R_{13}^{11} + R_{22}^{12} R_{23}^{11} + R_{23}^{12} R_{33}^{11}$$

gilt.

Wir müssen allerdings als einen ganz entscheidenden Punkt noch sicherstellen, dass diese Abbildung von Zöpfen zu Tensoren widerspruchsfrei ist. Das ist nicht selbstverständlich, da ein gegebener Zopf durch stetiges Deformieren (siehe Abschnitt 2) der Stränge in unterschiedlich aussehende Formen gebracht werden kann, die aber den gleichen Zopf darstellen. Jede solche Deformation lässt sich auf die drei Fälle zurückführen, die in Abbildung (A2) grafisch und in (Z1–3) in Formeln festgehalten sind. Wir müssen also sicherstellen, dass in diesen drei Fällen die jeweilige linke und rechte Seite der Gleichung dem selben Tensor entsprechen.

Es stellt sich heraus, dass die zweite Gleichung (Abbildung (A2) Mitte beziehungsweise (Z2)) nach unseren Regeln von horizontaler und vertikaler Komposition automatisch erfüllt ist, also überhaupt keine Bedingungen an  $R$  stellt. Sehen Sie warum?<sup>[5]</sup> Die erste und dritte Gleichung (links beziehungsweise rechts in Abbildung (A2)) nehmen für Tensordiagramme die folgende Form an:

$$\begin{array}{c} \boxed{R} \\ | \\ \boxed{R^*} \\ | \end{array} = \begin{array}{|} \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} \boxed{R} \\ | \\ \boxed{R} \\ | \\ \boxed{R} \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{R} \\ | \\ \boxed{R} \\ | \\ \boxed{R} \\ | \end{array} \qquad (X)$$

Diese beiden diagrammatischen Gleichungen (X) entsprechen zwei konkreten Anforderungen an  $R$ . Die erste Gleichung stellt eine Bedingung an  $R$ , die *Unitarität* genannt wird und von sehr vielen Tensoren erfüllt ist. Die zweite Gleichung ist hingegen eine komplizierte Bedingung an  $R$  – es ist die anfangs erwähnte *Yang–Baxter–Gleichung*, die wir nun endlich als eine Gleichung für Tensoren der Größe zwei exakt verstehen können. Wir bezeichnen die Lösungen  $R$  der beiden Gleichungen (X) als „unitäre  $R$ -Matrizen“.

Für jede unitäre  $R$ -Matrix  $R$  ist die Abbildung  $T_R$  widerspruchsfrei definiert und wird, wie bereits erwähnt, von Mathematikern *Darstellung* genannt. Das heißt, dass  $T_R$  Produkte von Zöpfen in (vertikale) Produkte von Tensoren überführt, also  $T_R(bb') = T_R(b)T_R(b')$  für alle Zöpfe  $b, b' \in B_n$  erfüllt. Die

<sup>[5]</sup> Man kann überprüfen, dass

$$(R \otimes I \otimes I)(I \otimes I \otimes R) = R \otimes R = (I \otimes I \otimes R)(R \otimes I \otimes I)$$

für alle Tensoren  $R$  der Größe zwei gilt.

Tensoren  $T_R(\sigma_k)$  erfüllen also Gleichungen analog zu (Z1-3), zum Beispiel  $T_R(\sigma_3)T_R(\sigma_1) = T_R(\sigma_1)T_R(\sigma_3)$ . In allen bekannten Fällen erfüllen die  $T_R(b)$  außerdem zusätzliche Gleichungen, die von  $R$  abhängen (man spricht von einer „nicht treuen“ Darstellung), auf die wir hier aber nicht näher eingehen können.

Um die Komplexität der Yang–Baxter-Gleichung zu verstehen, sollte man sich klarmachen, dass dies ein System von  $d^6$  gekoppelten kubischen Gleichungen (die linke und rechte Seite der Gleichung sind jeweils Tensoren der Größe drei) für  $d^4$  Unbekannte ist (die Einträge des Tensors  $R$  der Größe zwei). Im einfachsten Fall  $d = 2$  sind das also 64 Gleichungen für 16 Unbekannte. Es ist nicht sehr erhellend, diese Gleichungen alle explizit aufzuschreiben, die diagrammatische Form ist viel klarer.

Ein Beispiel einer Lösung mit  $d = 2$  ist

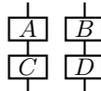
$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(I \otimes I + A \otimes B), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet  $\otimes$  die oben definierte horizontale Komposition und  $I$  die  $(2 \times 2)$ -Einheitsmatrix. Die Summe von Tensoren ist eintragsweise definiert, und der Vorfaktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  multipliziert alle Einträge des Tensors. Durch explizite Rechnung kann man verifizieren, dass dies tatsächlich eine  $R$ -Matrix ist.

Für  $d = 2$  sind alle Lösungen von (X) bekannt. Aber schon für  $d = 3$ , geschweige denn für allgemeines  $d$ , ist dies nicht mehr der Fall.

### Quiz 2:

- Betrachten Sie für vier beliebige Tensoren  $A, B, C, D$  der Größe eins (also  $(d \times d)$ -Matrizen) das quadratische Diagramm



Zeigen Sie, dass es keine Rolle spielt, ob zuerst die nebeneinander stehenden Matrizen horizontal und danach mit denen unter ihnen vertikal komponiert werden, oder ob zuerst die untereinander stehenden Matrizen vertikal und danach mit denen neben ihnen stehenden horizontal komponiert werden.

- Definieren sie einen Tensor  $R$  der Größe zwei wie folgt:  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 1$ , falls  $i_1 = j_2$  und  $i_2 = j_1$ , und  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 0$  in allen anderen Fällen. Prüfen Sie dann, dass  $R$  eine  $R$ -Matrix ist – also beide Gleichungen in (X) löst.

## 4 Von $R$ -Matrizen zu Unterfaktoren und zurück

Die Yang–Baxter-Gleichung inspiriert nach wie vor Mathematiker, neue Methoden zu erfinden, um etwas über ihre Lösungen zu lernen. Einerseits gibt es

recht konkrete Motivation wie etwa mögliche Anwendungen von  $R$ -Matrizen zur Modellierung von logischen Gates auf einem Quantencomputer, andererseits gibt es grundlegendes mathematisches Interesse an der Struktur der Lösungsmenge. Das Faszinierende an dieser Gleichung ist nicht nur, dass sie in so vielen unterschiedlichen Gebieten eine Rolle spielt, sondern auch, dass sie sehr unterschiedliche Herangehensweisen zulässt. Zum Beispiel gibt es Methoden, die auf Ideen aus der Quantisierung (Übergang von einem System der klassischen Mechanik zu einem System der Quantenmechanik) beruhen, oder abstrakte algebraische Methoden. In diesem letzten Abschnitt möchte ich umreißen, wie man sich den Lösungen der Yang–Baxter-Gleichung auch mit einem Umweg über unendlichdimensionale Analysis nähern kann.

Fassen wir zusammen, wo wir nach dem in Abschnitt 2 und 3 Gesagten stehen: Es gibt bestimmte Tensoren der Größe zwei, die  $R$ -Matrizen genannt werden. Die Bedingung, eine  $R$ -Matrix zu sein, ist kompliziert: Die Tensoren müssen dafür die Yang–Baxter-Gleichung erfüllen. Wir kennen einige Beispiele, aber haben keinen guten Überblick über die Menge aller  $R$ -Matrizen. Doch wir wissen, dass jede  $R$ -Matrix  $R$  eine Darstellung von Zöpfen  $b$  mit  $n$  Strängen durch Tensoren  $T_R(b)$  der Größe  $n$  definiert. Wie im letzten Abschnitt gesehen, lassen sich diese Tensoren untereinander (vertikal) multiplizieren, aber auch addieren, indem man sie Eintrag für Eintrag addiert. Es macht also Sinn, über Polynome in den  $T_R(b)$  zu sprechen. Diese bilden die Algebra

$$\mathcal{N}_{R,n} = \{\text{Alle Polynome in } T_R(b) \text{ für beliebige Zöpfe } b \text{ mit } n \text{ Strängen}\}.$$

Dies ist eine endlichdimensionale Algebra, in der das Kommutativgesetz nicht gilt, wie bereits im Zusammenhang mit dem vertikalen Produkt erwähnt. Aber die zweite in Quiz 1 beschriebene Aufgabe besagt auch, dass es in  $\mathcal{N}_{R,n}$  noch viele Elemente  $Z$  gibt, die  $ZT = TZ$  für alle  $T \in \mathcal{N}_{R,n}$  erfüllen. In diesem Sinne ist  $\mathcal{N}_{R,n}$  nicht komplett nicht-kommutativ.

Das ändert sich, wenn man den Limes  $n \rightarrow \infty$  ausführt; zugleich treten dabei die entscheidenden analytischen Eigenschaften von Unterfaktoren zutage. Dieser Limes wird in zwei Schritten ausgeführt: Im ersten Schritt betrachtet man die Algebra  $\mathcal{N}_{R,\infty}$ , die als Vereinigung der  $\mathcal{N}_{R,n}$  über alle natürlichen Zahlen  $n$  definiert ist. Somit enthält  $\mathcal{N}_{R,\infty}$  Darstellungen von Zöpfen mit einer beliebigen (aber jeweils endlichen) Anzahl von Strängen.

Während  $\mathcal{N}_{R,\infty}$  noch ein rein algebraisches Objekt ist, benötigt der zu Zöpfen mit unendlich vielen Strängen führende zweite Schritt in wesentlicher Weise Konzepte aus der Analysis, wie hier kurz umrissen werden soll: Man betrachtet die sogenannte *Spur*  $\tau$ , das ist die Abbildung von  $\mathcal{N}_{R,\infty}$  in (komplexe) Zahlen, die Tensoren  $T \in \mathcal{N}_{R,\infty}$  der Größe  $n$  die Zahl  $\tau(T) = d^{-n} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^d T_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$

zuordnet.<sup>[6]</sup> Mit Hilfe von  $\tau$  kann auf  $\mathcal{N}_{R,\infty}$  eine Norm  $\|T\| := \sqrt{\tau(T^*T)} \geq 0$  definiert werden, die Eigenschaften analog zu der Betragsfunktion  $x \mapsto |x|$  auf den rationalen Zahlen  $x \in \mathbb{Q}$  hat. Dabei ist insbesondere gemeint, dass die Betragsfunktion es erlaubt, vom Abstand  $|x - y|$  zwischen zwei rationalen Zahlen  $x, y$  zu sprechen und Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen zu definieren. Nimmt man alle möglichen Grenzwerte zu der Menge der rationalen Zahlen hinzu, erhält man die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , die auch irrationale Zahlen wie  $\sqrt{2}$  und  $\pi$  enthalten und die Grundlage der Analysis bilden.

In Analogie zu dieser „Vervollständigung“ von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  lässt sich die Algebra  $\mathcal{N}_{R,\infty}$  mit Hilfe der Spur  $\tau$  und der Norm  $\|\cdot\|$  zu einer größeren Algebra  $\mathcal{N}_R$  vervollständigen (auf die Details gehen wir hier nicht ein), die nun auch Darstellungen von Zöpfen mit unendlich vielen Strängen enthält. Diese Algebra enthält eine Identität  $\mathbf{I}$ , die zu dem Zopf mit unendlich vielen Fäden ohne irgendwelche Überkreuzungen gehört, und ist „extrem nicht-kommutativ“ in dem Sinne, das einzig und allein Vielfache von  $Z = \mathbf{I}$  die Eigenschaft haben, dass  $ZT = TZ$  für alle  $T \in \mathcal{N}_R$  erfüllen. Da  $\mathcal{N}_R$  auch die richtigen analytischen Eigenschaften hat (geeignet definierte Grenzwerte von Folgen in  $\mathcal{N}_R$  liegen auch in  $\mathcal{N}_R$ ), spricht man von einem *Faktor* – eine Sorte Algebra, die von John von Neumann ausgehend von seinen fundamentalen Arbeiten über die mathematischen Grundlagen der Quantenphysik definiert wurde.

Zusammen mit Francis Murray zeigte von Neumann, dass es drei grobe Typen von Faktoren gibt, genannt Typ I, II und III. Später verfeinerte Alain Connes diese Klassifikation. Auf Grundlage dieser Resultate kann man zeigen, dass der Faktor  $\mathcal{N}_R$  keinerlei interessante Information über  $R$  enthält; unabhängig von  $R$  erhält man immer die gleiche Algebra  $\mathcal{N}_R$ , die im Fachjargon „hyperfiniter Faktor vom Typ  $\text{II}_1$ “ heißt. Diese ernüchternde Nachricht scheint die ganze Herangehensweise mit unendlichdimensionalen Algebren in Frage zu stellen, kann aber behoben werden: Wenn man nicht nur den Faktor  $\mathcal{N}_R$  allein, sondern auch noch einen kleineren in ihm enthaltenen Faktor  $\mathcal{N}_R^<$  betrachtet,<sup>[7]</sup> erhält man

<sup>[6]</sup> Diagrammatisch sieht die Spur so aus (hier im Beispiel für einen Tensor  $T$  der Größe 2):

$$\tau\left(\begin{array}{c} | \\ | \\ \boxed{T} \\ | \\ | \end{array}\right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \boxed{T} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{d^2} \sum_{i_1, i_2=1}^d T_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}.$$

<sup>[7]</sup> Der kleinere Faktor ist dabei mit der gleichen Idee definiert, die Hilberts Hotel [8] zugrunde liegt: In der Zopfgruppe mit unendlich vielen Strängen schiebt man alle Zöpfe um einen Strang nach rechts. Das heißt, man betrachtet die Verschiebungsabbildung  $s: B_\infty \rightarrow B_\infty$ , die durch multiplikative Fortsetzung von  $s(\sigma_k) = \sigma_{k+1}$  definiert ist, z.B.  $s(\sigma_1 \sigma_2^{-1}) = \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ . Die Zöpfe  $s(b)$ ,  $b \in B_\infty$ , verflechten den ersten Strang nicht und definieren den kleineren Faktor  $\mathcal{N}_R^<$ .

einen sogenannten *Unterfaktor*  $\mathcal{N}_R^{\leq} \subset \mathcal{N}_R$ , also eine Inklusion von zwei Faktoren. Diese weitaus komplexere Struktur enthält viel relevante Information über  $R$  und die entsprechenden mathematischen Werkzeuge, um diese Information zu extrahieren.

Vaughan Jones (1952–2020) entdeckte 1983 eine numerische Invariante für Unterfaktoren, den „Index“ [2]. Dieser misst die relative Größe des kleineren Faktors in dem größeren Faktor und führte zu intensiven Forschungen über Unterfaktoren.<sup>[8]</sup> Auch die Konferenz in Oberwolfach im Oktober 2019, auf der dieser Snapshot beruht, war diesem Thema gewidmet.

Mit diesen und anderen Methoden kann man die Menge aller  $R$ -Matrizen studieren und trotz des erstaunlichen Umwegs von einem endlichen Tensor  $R$  über eine Inklusion von zwei unendlichdimensionalen Algebren konkrete Informationen über die Lösungen der Yang–Baxter-Gleichung erhalten. In einem speziellen Fall hat dies bereits zu einer vollständigen Klassifikation geführt [7], aber im Allgemeinen bleibt für uns und zukünftige Forscher viel zu tun!

Ein besseres Verständnis dieses Klassifikationsproblems könnte verschiedene Anwendungen in der Quantenphysik haben: Es würde den Status von unitären  $R$ -Matrizen als geeignete Modelle von logischen Gates in einem (bisher hypothetischen) topologischen Quantencomputer klären, und in einer Variante zum Verständnis von Modellen der Quantenfeldtheorie beitragen.

## Bildquellen

Alle Grafiken wurden vom Autor mit Hilfe der TikZ-Bibliothek *knots* für diesen Snapshot hergestellt.

## Literatur

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [2] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, *Inventiones Mathematicae* **72** (1983), Nr. 1, 1–25.
- [3] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, *Annals of Mathematics* **126** (1987), 335–388.
- [4] C. Kassel und V. Turaev, *Braid Groups*, Springer, 2008.

---

<sup>[8]</sup> Interessanterweise gibt es auch einen Weg von Unterfaktoren zurück zu Zopfgruppen: Jones' Arbeiten zu Unterfaktoren führten zu überraschenden Einsichten in Darstellungen der Zopfgruppe und dem berühmten Jones-Polynom der Knotentheorie [3].

- [5] L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, 1993.
- [6] K. H. Ko, S. J. Lee, J. H. Cheon, J. W. Han, J. Kang und C. Park, *New Public-Key Cryptosystem using Braid Groups*, Advances in Cryptology – CRYPTO 2000 (Mihir Bellare, Hrsg.), Lecture Notes in Computer Science, Bd. 1880, Springer, 2000, S. 166–183.
- [7] G. Lechner, U. Pennig und S. Wood, *Yang-Baxter representations of the infinite symmetric group*, Advances in Mathematics **355** (2019), 106769.
- [8] Wikipedia, *Hilberts Hotel*, 2014, [https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts\\_Hotel](https://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Hotel), besucht: 5. Februar 2020.

Gandalf Lechner *ist Reader an der Universität von Cardiff, Wales.*

*Mathematische Gebiete*  
Algebra und Zahlentheorie, Analysis,  
Geometrie und Topologie

*Verbindungen zu anderen Gebieten*  
Physik

*Lizenz*  
Creative Commons BY-SA 4.0

*DOI*  
10.14760/SNAP-2021-005-DE

---

*Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach* bieten spannende Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung. Sie werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Die Schnappschüsse haben zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der interessierten Öffentlichkeit weltweit zu fördern. Alle Schnappschüsse werden in Kooperation mit der IMAGINARY Onlineplattform veröffentlicht und können unter [www.imaginary.org/snapshots](http://www.imaginary.org/snapshots) sowie [www.mfo.de/snapshots](http://www.mfo.de/snapshots) abgerufen werden.

ISSN 2626-1995

---

*Editor(inn)en*  
Martin Kalck, Lara Skuppin  
[junior-editors@mfo.de](mailto:junior-editors@mfo.de)

*Chefeditorin*  
Sophia Jahns  
[senior-editor@mfo.de](mailto:senior-editor@mfo.de)

Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach gGmbH  
Schwarzwaldstr. 9–11  
77709 Oberwolfach  
Deutschland

*Direktor*  
Gerhard Huisken



Mathematisches  
Forschungsinstitut  
Oberwolfach



**IMAGINARY**  
open mathematics