

Curvatura escalar positiva y aplicaciones

Jonathan Rosenberg^[1] • David Wraith

Introducimos la idea de curvatura, incluyendo su desarrollo histórico, y nos enfocamos en la curvatura escalar de una variedad. Uno de los temas principales de investigación actual es entender la curvatura escalar positiva. Discutiremos por qué es interesante y su relación con la teoría general de la relatividad.

1. El concepto de curvatura

Un conocido poema atribuido a Leo Moser, que se puede encontrar en [4], nos dice lo siguiente del famoso matemático Paul Erdős [2]:

Una conjetura profunda y honda
es si la circunferencia es redonda.
En un artículo de Erdős
escrito en lengua de kurdos
hay un contraejemplo que la responda.

Obviamente el poema es una broma, pero tiene cierto contenido matemático, ya que existen dos nociones de curvatura, esto es, “del estado de ser redondo”, una *extrínseca* y la otra *intrínseca*, y la circunferencia satisface una pero no

[1] Jonathan Rosenberg recibe soporte de la US National Science Foundation, ayuda número DMS-1607162.

[2] N. de las T.: En el original: A conjecture both deep and profound // Is whether a circle is round. // In a paper of Erdős // Written in Kurdish // A counterexample is found.

la otra. La curvatura extrínseca mide cuánto se curva un objeto geométrico contenido en un espacio en relación con este. Una circunferencia en el plano es el ejemplo perfecto – en cada punto se “curva” hacia el centro, y su curvatura es el recíproco, $1/r$, de su radio r . Circunferencias con radios pequeños se curvan más y entonces tienen mayor curvatura que circunferencias de mayor radio. De hecho, cuando el radio tiende a infinito la circunferencia se ve cada vez menos “curva” o “redonda” en relación con el plano que lo contiene. La curvatura intrínseca, por otro lado, tiene que ver con las propiedades geométricas del objeto mismo sin ninguna consideración del espacio en el que está contenido. Imaginemos una hormiga que vive en una circunferencia y que no puede ver nada fuera de su mundo unidimensional. Desde su punto de vista la circunferencia es “plana” en el sentido de que localmente las distancias se miden igual que en la línea recta (euclídea). La única diferencia es que si la hormiga camina lo bastante, va a regresar a su punto inicial. Así, desde el punto de vista de la hormiga, la circunferencia no es redonda.

La distinción entre curvatura intrínseca y extrínseca es más interesante en el caso de las superficies, en dimensión 2. Esta distinción fue estudiada por primera vez en forma detallada por Carl Friedrich Gauss hacia 1820. Como ejemplo, consideremos la superficie en el espacio tridimensional dada por la gráfica $z = f(x, y)$ de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + Bxy + Cy^2),$$

donde A, B y C son números reales. Para medir la geometría extrínseca de una superficie en el espacio, consideramos la matriz de segundas derivadas de f ³,

$$S = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}.$$

En el origen $(0, 0)$, que es un punto crítico de la función (es decir, las derivadas se anulan), la matriz S se denomina *operador de forma* y mide la concavidad o convexidad de la función en ese punto y en cada dirección. Son de un interés especial las cantidades $H = \frac{1}{2}(A + C)$, la mitad de la traza, llamada *curvatura media*; y $K = AC - \frac{B^2}{4}$, el determinante, llamada *curvatura gaussiana* de la superficie en ese punto.

Para dar otro ejemplo instructivo, la curvatura gaussiana de la esfera

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

³ Si tenemos una función de una variable, que podemos representar como una curva en el plano, la primera derivada nos da la pendiente del vector tangente en cada punto. La segunda derivada da la tasa de cambio de las pendientes. Para una superficie, es decir, para una función de dos variables, obtenemos una matriz para la segunda derivada porque debemos calcular las derivadas con respecto a dos direcciones.

de radio R es $K = \frac{1}{R^2}$. Para ver por qué, se pueden calcular las derivadas parciales escribiendo la mitad superior de la esfera como la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Por lo tanto, la curvatura de la esfera es inversamente proporcional al cuadrado de su radio.

El descubrimiento interesante de Gauss, que él llamó *Teorema Egregio* o “teorema excelente”, es que la curvatura es en realidad un invariante *intrínseco*, en el sentido de que mide la geometría intrínseca y no solamente la geometría del objeto respecto a como está contenido en el espacio tridimensional. Por ejemplo, si $K = 0$ entonces la superficie es *plana*, en el sentido de que puede ser aplanada a una hoja de papel (véase la Figura 1), mientras que si $K > 0$ la superficie se *curva positivamente* y, si $K < 0$ entonces la superficie se *curva negativamente*. En estos últimos casos se puede demostrar que es imposible “aplanar” a la superficie sin distorsionarla. La curvatura positiva de la superficie de la Tierra explica por qué un mapa bidimensional de una porción de ella necesariamente está distorsionado, mientras que el hecho de que la curvatura sea el recíproco del cuadrado del radio de la Tierra (que es del orden de 6000 km) explica por qué uno podría cometer el error de suponer que la Tierra es plana.



Figura 1: Aplanando una superficie con $K = 0$ (izquierda) al plano (derecha).

2. Variedades y curvatura escalar

El siguiente paso importante después de Gauss lo dio Bernhard Riemann [11], quien introdujo dos nociones fundamentales de la geometría, la noción de *variedad* (de dimensión n) y la de *métrica riemanniana* (que expresó en términos de lo que él llamó *elemento de línea*), un objeto matemático que nos permite medir longitudes de curvas.

Para introducir el concepto de variedad vamos a empezar con el ejemplo más elemental: los espacios euclídeos, de los que hay uno en cada dimensión. En dimensión uno tenemos al conjunto de los números reales que podemos interpretar como una línea. En dimensión dos tenemos al conjunto de pares de números reales $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, o más sucintamente \mathbb{R}^2 . Al ver a estos pares como coordenadas podemos identificar a \mathbb{R}^2 con el plano. En dimensión

3 tenemos a $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto de tripletas de números reales que podemos identificar con el espacio 3 dimensional. Como podemos considerar colecciones de n números reales (n -tuplas), para cualquier entero positivo n podemos definir al espacio euclídeo de dimensión n mediante $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, pero para $n > 3$ no es tan fácil de visualizar.

Vale la pena comentar ahora acerca de la noción de dimensión en matemáticas. A pesar de que la idea de usar dimensiones mayores parece ciencia ficción en matemáticas es muy común. El número de dimensiones de un objeto es simplemente el número de parámetros requerido para describirlo. Por ejemplo, consideremos un par de hormigas que viven en la superficie de una mesa. Podemos describir la posición de cada hormiga especificando un par de coordenadas. Por lo tanto, describir las posiciones de las dos requiere de cuatro coordenadas. Si pensamos en el conjunto de todas sus posibles posiciones esto es simplemente un subconjunto de \mathbb{R}^4 . Si queremos registrar la posición de las hormigas a medida que pasa el tiempo, entonces necesitamos introducir un parámetro de tiempo, lo que significa que ahora estamos trabajando en \mathbb{R}^5 . Así, el movimiento de estas dos hormigas se puede describir como un camino a través de este espacio pentadimensional.

La idea de variedad generaliza de forma natural la noción de superficie. Notemos que cualquier superficie (por ejemplo la esfera) tiene la propiedad de que *localmente* parece como una región del plano \mathbb{R}^2 . Es decir, un entorno pequeño de cada punto se ve como \mathbb{R}^2 , pero no así la superficie total. Más precisamente, si hacemos zoom en cualquier punto, entonces lo que vemos es esencialmente indistinguible de un entorno de \mathbb{R}^2 . Una variedad n -dimensional es el concepto que resulta de la generalización obvia de esta idea: una n -variedad M^n es un objeto que localmente se asemeja a \mathbb{R}^n , el espacio euclídeo n -dimensional. La naturaleza “localmente euclídea” de las variedades nos permite generalizar algunas de las nociones naturales del espacio euclídeo, como las coordenadas: si restringimos nuestra atención a pedazos suficientemente pequeños de M , nuestra posición está determinada por los valores de n coordenadas locales x_1, x_2, \dots, x_n . Con un poco de trabajo podemos generalizar el cálculo diferencial e integral a las variedades. De hecho, las derivadas son una herramienta clave para comprender la curvatura de las variedades.

Es importante enfatizar que la noción de variedad no es una mera generalización por el gusto de generalizar. Las variedades aparecen de forma natural en las matemáticas, la ciencia y en otros ámbitos. Por ejemplo, el conjunto de puntos que pueden ocupar el par de hormigas forma una variedad de cuatro dimensiones. Si estas hormigas vivieran en cambio en la superficie de una pelota, especificar la posición de cada hormiga requeriría tres coordenadas espaciales, por lo que las posiciones de ambas en cualquier momento pueden ser registradas por un elemento de \mathbb{R}^6 . El conjunto de todas las posiciones posibles de las dos

hormigas seguiría siendo una variedad de cuatro dimensiones (como la superficie de la pelota es bidimensional cada hormiga contribuye con dos dimensiones), pero la variedad es ahora un subconjunto de \mathbb{R}^6 .

Un resultado de John Nash [10], un matemático más famoso por sus contribuciones a la teoría de juegos que a la geometría ^[4], dice que cualquier variedad, con cualquier grado de distorsión, puede ser *encajada* en un espacio euclídeo de dimensión suficientemente grande de modo que su forma se preserva. Encajarlo significa que podemos identificar cada punto de la variedad con un punto en el espacio euclídeo de tal manera que se preservan las propiedades locales. Además, en cualquiera de estos espacios euclídeos tenemos infinitas formas de encajarlo. Esto sugiere que si queremos investigar la geometría de una variedad, sería útil tener una forma que evite tener que escoger primero un encaje explícito. Es decir, nos gustaría encontrar un punto de vista intrínseco en el estudio de las propiedades geométricas de las variedades. Riemann propuso una forma de hacer esto introduciendo el concepto que ahora se conoce como métrica riemanniana. Aunque no la definiremos con precisión, ya que es algo técnica, describiremos sus características principales.

En general una *métrica* es una manera de medir la distancia entre dos puntos cualesquiera de un espacio dado. Por ejemplo, en el plano, la métrica “usual” se define dando la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de línea recta que los une. Esta no es la única opción, podríamos definir la distancia entre dos puntos como la suma de la distancia entre sus coordenadas x y la distancia entre sus coordenadas y . Esta es la llamada métrica *taxi*. En una superficie podemos medir distancias usando un cordel: dados dos puntos de una superficie, imaginemos que es posible unirlos por un cordel sin salirse de la superficie (¡esto es más fácil en teoría que en la práctica!). Ahora tensamos la cuerda, manteniendo en todo momento el contacto con la superficie, de manera que ahora ocupe el camino más corto entre ambos puntos. Este camino más corto se llama *geodésica*. En el plano \mathbb{R}^2 con la métrica usual, las geodésicas son las líneas rectas; en la superficie de la esfera son arcos de círculos máximos. Si marcamos el cordel allá donde está en contacto con los dos puntos, lo retiramos de la superficie y lo enderezamos, podremos medir su distancia con una regla.

La geometría plana básica requiere de las nociones de distancia y ángulo. Podemos considerar que un ángulo viene dado por dos curvas geodésicas que se intersecan en un punto. Por ejemplo, consideremos dos meridianos de la Tierra que se intersecan en el polo norte. Los meridianos son curvas, pero en cada punto tales curvas tienen una *línea tangente*, que es la línea recta (del espacio tridimensional) que más se acerca a la curva en el punto en cuestión. En el polo norte, todas las posibles líneas tangentes se encuentran en el plano horizontal

^[4] Representado en la película de 2001 *Una mente brillante*, www.abeautifulmind.com

que toca a la esfera en el polo. Así, dados dos meridianos podemos obtener dos líneas tangentes en el polo que pertenecen al mismo plano (el *plano tangente* a la esfera en el polo), y sabemos medir ángulos en un plano. La esfera, los meridianos y el polo norte no tienen nada en especial: podemos medir ángulos de la misma forma en cualquier punto de cualquier superficie dado por dos curvas que se intersequen.

Una métrica riemanniana es un objeto que proporciona una noción de distancia y ángulo a una variedad. A partir de ahí, podemos investigar cualquier aspecto geométrico. Así, una métrica riemanniana le da a una variedad una geometría, pero también recíprocamente, cualquier geometría expresada en una variedad corresponde a una métrica ^[5], aunque en una variedad puede haber más de una elección de métrica riemanniana. Una vez que una variedad ha sido equipada con una métrica riemanniana, tiene sentido preguntarnos por áreas o volúmenes, o preguntarnos por la curvatura.

La curvatura gaussiana o de Gauss, mencionada anteriormente, es la noción estándar de curvatura de una superficie. Esta noción es anterior a la idea de Riemann de variedad y de métrica riemanniana. Aunque ya tenemos una idea intuitiva de lo que es la curvatura, es importante saber qué es lo que mide exactamente la curvatura de Gauss. A continuación damos una descripción, aunque existen otros enfoques equivalentes.

Todos sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° . No obstante, esta afirmación popular no es cierta en general. Lo que es verdad es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo en el plano es 180° . Pero pueden existir triángulos en otros espacios no planos. Consideremos por ejemplo a la esfera, o a la superficie de la Tierra. Podemos escoger tres puntos diferentes en la esfera y unirlos con geodésicas (recordemos que estas son las trayectorias más cortas de la superficie que unen a estos puntos). El resultado es llamado *triángulo geodésico* en la esfera. Si sumamos los ángulos internos de este triángulo, veremos que su suma es *más* de 180° . Intentemos dibujar en una esfera el triángulo que tiene un vértice en el polo norte y los otros dos en el ecuador a una distancia de un cuarto de la circunferencia. Nos encontramos que los ángulos de este triángulo son rectos, por lo tanto, su suma es 270° . Por lo tanto, los ángulos de un triángulo en la esfera son más “gordos” que los triángulos en el plano con lados respectivos de la misma longitud. Por otro lado, si hacemos lo mismo en una superficie como la silla de montar, los ángulos van a sumar *menos* de 180° : los ángulos en una silla de montar son más “delgados” que los ángulos correspondientes en el plano. Se muestra un ejemplo en la Figura 2. Si α, β y γ denotan la longitud de los ángulos internos de nuestro triángulo geodésico, el *excedente de ángulo*, $\alpha + \beta + \gamma - 180$, detecta

^[5] Aunque hay métricas que no provienen de una métrica riemanniana, como por ejemplo la métrica taxi. (N. de las T.)

la forma en que una superficie se curva, donde las esferas tienen excedente de ángulo positivo, los planos tienen excedente igual a cero y las sillas de montar tienen excedente negativo.

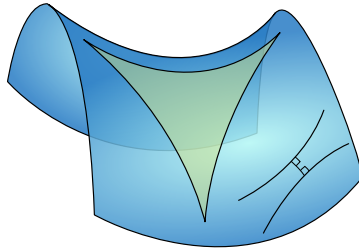


Figura 2: Un triángulo en una superficie tipo silla de montar con ángulos que suman menos de 180° .

A pesar de que el excedente detecta la curvatura, no es equivalente a conocer la curvatura gaussiana. El problema es que el excedente depende generalmente del triángulo que escojamos, mientras lo que queremos es producir un número en cada punto de la superficie que represente de alguna forma a la curvatura de ese punto. Daremos ahora una idea de lo que es la curvatura gaussiana. Consideremos una sucesión infinita de triángulos cada vez más pequeños que contienen un punto fijo dado. Si dividimos el excedente de ángulo de estos triángulos por su área, entonces la sucesión de números que obtenemos converge a un número, y ese número es precisamente la curvatura gaussiana del punto fijo. Así las esferas tienen curvatura de Gauss positiva y las sillas de montar (como la superficie $z = x^2 - y^2$) tienen curvatura de Gauss negativa. De hecho, una superficie con curvatura de Gauss positiva en todo punto se parece, en cierto grado, a una esfera, y a una silla de montar en el caso de que la curvatura gaussiana sea negativa.

Dado que la noción de variedad generaliza la noción de superficie y que una métrica riemanniana da una geometría a las variedades es razonable intentar generalizar la curvatura gaussiana a las *variedades riemannianas*, es decir, a las variedades que tienen una métrica riemanniana. La idea básica es reducir el problema a algo de dimensión dos. Consideremos una variedad riemanniana M de dimensión n . En un punto $x \in M$ tenemos un “espacio tangente” que consiste de todas las direcciones tangentes a M en x . Podemos pensarlo como una copia de \mathbb{R}^n con el origen pegado a M en el punto x , de la misma forma en la que identificamos al plano horizontal que pasa por el polo norte con el plano tangente de la esfera en el polo norte. Dentro de este espacio tangente de dimensión n hay una cantidad infinita de planos de dimensión dos que pasan por el origen. Dado uno de estos planos, P , podemos construir un pedazo

de superficie contenida en M , que contiene a x y que es tangente a P : para $v \in P$ sigamos por un intervalo de tiempo pequeño a la geodésica que comienza en x y tiene velocidad inicial v . Tomando la unión sobre todos los $v \in P$ de esas geodésicas nos da una pequeña superficie que contiene a x y cuyo espacio tangente en x es P . Esta superficie tiene curvatura gaussiana en x . Definimos la *curvatura seccional* de M en x correspondiente al plano P como la curvatura gaussiana de esta pequeña superficie.

Puesto que en una variedad hay muchos planos tangentes en un punto, la curvatura seccional toma varios valores en cualquier punto. Se comporta entonces de manera diferente a la curvatura gaussiana que es una función en la superficie que asigna un único valor a cada uno de sus puntos. No es irracional esperar encontrar una función similar en una variedad riemanniana, de hecho hay una forma fácil de hacer esto. Solamente debemos tomar en cada punto el promedio de las curvaturas seccionales (donde promediamos sobre todos los planos de dimensión dos en el espacio tangente). La función resultante se llama *curvatura escalar* de la variedad. Siendo un promedio uno espera que mucha información de la curvatura seccional se pierda y ese es ciertamente el caso. Sin embargo, al promediar aún queda información geométrica interesante. Por ejemplo, denotemos por $B(x, r)$ a la bola de radio r y centro x contenida en una variedad M^n (es decir, el conjunto de puntos de la variedad que están a una distancia como máximo r del punto x), entonces el volumen (n -dimensional) de la bola para r pequeño está dado aproximadamente mediante la fórmula

$$\text{vol}(B(x, r)) \approx r^n \omega(n) \left(1 - \frac{n(n-1)}{6(n+2)} s(x) r^2 \right),$$

donde $s(x)$ denota a la curvatura escalar de x y $\omega(n)$ es el volumen de la bola de dimensión n de radio 1 en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, $\omega(2)$ es el área de un disco de radio 1 en el plano, así que $\omega(2) = \pi$, y $\omega(3) = 4\pi/3$ es el volumen de una esfera de radio 1. Así, la curvatura escalar controla el volumen de bolas pequeñas de la variedad.

Para tener una idea más clara de lo que nos dice esta fórmula consideremos nuevamente el caso de la superficie de una esfera de radio R . Como ya se señaló $\omega(2) = \pi$ y en este caso la curvatura escalar es la curvatura gaussiana y es igual a $1/R^2$, por lo que

$$\text{vol}(B(x, r)) \approx r^2 \pi \left(1 - \frac{1}{12R^2} r^2 \right).$$

En otras palabras, cuanto más grande es el radio de la esfera, más cerca está la superficie de ser plana, y el área de un disco en la superficie está más cerca de ser igual a πr^2 .

El signo positivo o negativo de la curvatura escalar tiene mucho interés, aunque no es tan fácil interpretarlo como en el caso de la curvatura gaussiana. Se puede demostrar que a cualquier variedad de dimensión al menos tres se le puede dotar de una métrica riemanniana con curvatura escalar negativa en todo punto [8]. Esto no es posible con curvatura escalar positiva: la curvatura escalar positiva impone ciertas restricciones (topológicas) a las variedades. Esto nos hace preguntarnos qué variedades admiten métricas con curvatura escalar positiva. Aunque tenemos una comprensión bastante buena de lo que sucede, aún no conocemos una respuesta completa.

Consideremos de nuevo las superficies. La esfera redonda usual (de cualquier radio) tiene curvatura gaussiana positiva como discutimos anteriormente. Sin embargo, *el toro*, es decir, la superficie de una rosquilla, no admite métricas riemannianas con curvatura gaussiana positiva en todo punto, es decir, no importa como pongamos este objeto en el espacio euclídeo, siempre habrá puntos donde localmente el toro parezca plano o una silla de montar. Lo mismo es cierto para una rosquilla doble, o una rosquilla triple, o una rosquilla con cualquier número de agujeros. Podemos generalizar la noción de esfera y toro a cualquier dimensión. Por ejemplo, para cualquier entero positivo n la esfera de radio uno de dimensión n está definida por

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observemos que con esta notación la esfera estándar se denota como S^2 y la circunferencia como S^1 . Para estos objetos de dimensiones mayores a dos, los mismos comentarios son ciertos si reemplazamos la curvatura gaussiana por la curvatura escalar.

Si una variedad admite una métrica con curvatura escalar positiva (o si una superficie admite una métrica con curvatura gaussiana positiva), esa métrica no es única. La variedad puede adquirir distintas formas bajo la propiedad de curvatura escalar positiva. Para visualizar esto, consideremos de nuevo una esfera ordinaria. Si la deformamos ligeramente (imaginemos un globo) entonces su curvatura cambia muy poco. Si este cambio es suficientemente pequeño la curvatura escalar seguirá siendo positiva. Claramente, podemos realizar estas pequeñas deformaciones de infinitas maneras diferentes, demostrando que cualquier variedad que admite una métrica con curvatura escalar positiva, admite infinitas métricas con esta propiedad!

La siguiente pregunta natural es qué podemos decir de la colección de métricas con curvatura escalar positiva de una variedad riemanniana cuando este conjunto es no vacío. No es obvio que se pueda decir algo interesante pero esta colección de métricas resulta ser un objeto fascinante y es el centro de atención de mucha investigación actual. El propósito final es entender de forma razonable a la topología de este conjunto. Un dato curioso es que ocurren diferentes fenómenos de acuerdo con la dimensión, pero pospondremos esta discusión a la sección 4.

3. Conexiones con la teoría general de la relatividad.

En la última parte de la conferencia en la que él mismo presentó los conceptos de variedad y curvatura [11], Riemann especuló que el espacio en sí mismo podría ser una variedad y que su curvatura podría tener significado físico. Esta predicción fue confirmada de forma espectacular por Albert Einstein con su teoría general de la relatividad [3].

La idea de Einstein (que obtuvo en parte de Hendrik Lorentz, Hermann Minkowski y Henri Poincaré) fue considerar al espacio y al tiempo como diferentes “rebanadas” de una variedad llamada *espacio-tiempo*. Así, si nuestro universo físico es 3-dimensional, al agregar al tiempo como otra coordenada obtenemos una variedad espacio-tiempo 4-dimensional. La geometría de esta variedad no es exactamente riemanniana sino *pseudoriemanniana*, en el sentido de que existen curvas con longitud negativa (“tipo tiempo”) y con longitud cero (“tipo luz”). No obstante, en muchos aspectos, el formalismo habitual de la geometría riemanniana funciona y se puede definir a la curvatura escalar como antes.

La idea de Einstein es que la curvatura del espacio-tiempo codifica lo que entendemos como el campo gravitacional. Bajo el supuesto más simple de que estamos mirando una porción del espacio-tiempo donde no hay materia (por ejemplo, en el espacio interestelar), la ecuación básica de la relatividad general dice que ese espacio-tiempo es lo que llamamos ahora una *variedad de Einstein*, es decir, una variedad con *curvatura de Ricci* constante (en rigor, igual a un múltiplo constante de la métrica pseudoriemanniana). Aquí la curvatura de Ricci es una curvatura intermedia entre la curvatura seccional y la curvatura escalar. Para una dirección dada de la variedad, se calcula promediando las curvaturas seccionales de planos bidimensionales que contengan a tal dirección, en vez de promediar sobre todas las curvaturas seccionales.

La formulación anterior utiliza geometría *pseudoriemanniana* pero sería bueno relacionarla con la geometría riemanniana. Podemos hacer esto si suponemos que el espacio-tiempo se divide en $M^3 \times \mathbb{R}$, donde el primer factor es el “espacio” (con una auténtica métrica riemanniana, posiblemente dependiente del tiempo) y el segundo factor es el “tiempo”. De hecho, los ejemplos clásicos, el espacio-tiempo de Schwarzschild y de Robertson-Walker, son de esta forma.

Ahora uno puede hacerse la siguiente pregunta. Dada una variedad de dimensión tres con una métrica riemanniana, ¿qué restricciones geométricas le impone la relatividad general para que pueda ser el “espacio” del espacio-tiempo? Esta pregunta (que uno puede generalizar a dimensiones arbitrarias, aunque la conexión con la física se vuelve más oscura), condujo a lo que se llama la *conjetura de la masa positiva*. En muchos casos esta conjetura es un teorema, el *teorema de la masa positiva* [14, 15, 16], y obtener generalizaciones de este es un tema activo de investigación.

El teorema de la masa positiva trata básicamente de lo siguiente. Supongamos que M es una variedad con una métrica riemanniana y supongamos que M “se extiende hasta el infinito”. Supongamos también que en el infinito M es muy parecida al espacio euclídeo (imaginemos una situación física donde una variedad M de dimensión tres representa al “espacio” del espacio-tiempo tal que no hay materia cerca del infinito de modo que el espacio no está curvado ahí). Entonces, a partir de las ecuaciones de la relatividad general se puede inferir de la métrica de M que la masa tiene que estar en su parte “curvada”. El teorema de la masa positiva dice que esta masa es un número positivo. Si bien esto puede parecer intuitivamente obvio (por ejemplo, en nuestro universo o incluso en el sistema solar), no es nada obvio matemáticamente.

4. Espacios de métricas con curvatura escalar positiva

Anteriormente mencionamos que mucha de la investigación actual se enfoca en estudiar cómo es el espacio de métricas riemannianas $\mathcal{R}^+(M)$ de una variedad M con curvatura escalar positiva. El espacio de *todas* las métricas riemannianas, sin restricciones de curvatura siempre es contráctil, es decir, se puede “retraer” de forma continua a un punto. Para hacer nuestra exposición más concreta, nos centraremos en las esferas S^n para varios valores de n . Se sabe desde hace tiempo que $\mathcal{R}^+(S^2)$ es contráctil [13, Teorema 3.4], pero $\mathcal{R}^+(S^n)$ no solamente no es contráctil sino que también tiene un número infinito de “componentes arco-conexas” si n es de la forma $4k + 3$ con $k \geq 1$ entero ([5, Teorema 4.47] y [12, Teorema 2.6]). Veamos lo que significa esto con más detalle.

Hemos señalado en el párrafo anterior que el conjunto de todas las métricas riemannianas de una variedad es contráctil, así que podemos pensarlo como una “sopa” infinita de métricas en nuestra variedad, sin que esta sopa tenga ninguna característica o estructura en particular. Si nos movemos en esta sopa de forma continua esto es equivalente a cambiar de forma continua la geometría de nuestra variedad. Supongamos que tenemos dos métricas con curvatura escalar positiva. Nos podemos mover dentro de la sopa de una geometría a la otra de distintas formas. La pregunta es: ¿nos podemos mover de una a la otra de tal forma que todas las geometrías intermedias también tengan curvatura escalar positiva? En la esfera de dos dimensiones la respuesta es afirmativa, pero en S^{4k+3} con $k \geq 1$ el resultado anterior nos dice que la respuesta es negativa. De hecho, es posible escoger un número infinito de métricas distintas en S^{4k+3} con curvatura escalar positiva tal que ningún par de ellas puede ser unido por una curva (un camino o arco) formada por métricas con curvatura escalar positiva. Esto es a lo que nos referimos cuando decimos que $\mathcal{R}^+(S^{4k+3})$ tiene un número infinito de componentes arco-conexas cuando $k \geq 1$.

Imaginemos que podemos ver la sopa de todas las métricas con lentes espe-

ciales que resaltan a las métricas con curvatura escalar positiva. Lo que veremos es una colección de “islas” de métricas con curvatura escalar positiva dentro del espacio de todas las métricas. Una especie de sopa minestrone. Cada una de las piezas flotando en la sopa es una componente arco-conexa de métricas con curvatura escalar positiva. En S^{4k+3} tenemos infinitas piezas de ese tipo en nuestro tazón infinito. Esto, sin embargo, nos hace plantearnos la siguiente pregunta: ¿qué se puede decir de estas componentes de métricas con curvatura escalar positiva? ¿Qué forma o qué características tienen estas piezas? Ésta resulta ser una pregunta más delicada que los matemáticos apenas estamos comenzando a responder.

El primer problema a considerar es qué tipo de características deberíamos buscar. Hay muchas maneras de interpretar esta pregunta, pero uno podría intentar identificar “agujeros” en nuestro espacio de métricas con curvatura escalar positiva.

Para ilustrar nuestro enfoque consideremos el problema más sencillo de identificar dichos agujeros en la esfera de dimensión dos, S^2 . Si dibujamos una curva cerrada en esta esfera podemos contraerla a un punto sin salirnos de la superficie. Podemos pensar que la curva cerrada es una goma elástica estirada en la esfera que cuando se contrae, se contrae a un punto. Más formalmente, podemos pensar en esa curva cerrada como una aplicación continua del círculo en la esfera, $L: S^1 \rightarrow S^2$. Decimos que todas esas curvas son “homótopas a una curva constante” para transmitir la idea de encoger una curva cerrada a un punto. En mayor detalle, decimos que dos aplicaciones continuas de un espacio X a un espacio Y son “homótopas” si se puede deformar de manera continua la una en la otra; una aplicación constante es una aplicación $C: X \rightarrow Y$ tal que $C(x) = y_0$ para todo $x \in X$ y para algún $y_0 \in Y$ fijo, por lo que una curva cerrada constante en S^2 es simplemente una aplicación $S^1 \rightarrow S^2$ donde la imagen de cada punto de S^1 es el mismo punto fijo en S^2 . El concepto de aplicaciones homótopas es muy útil: hay, en general, una multitud de aplicaciones posibles $X \rightarrow Y$, pero si elegimos ver dos aplicaciones homótopas como equivalentes (ya que esencialmente contienen la misma información), entonces esto significa que podemos concentrarnos en una colección menor de aplicaciones. En particular, nuestra observación de que todas las curvas cerradas en la esfera pueden ser encogidas a una curva constante significa que esencialmente solo debemos considerar una, es decir, un curva cerrada constante con un “punto base” escogido. No es difícil ver que es posible decir lo mismo de curvas cerradas en cualquier otra esfera S^n con $n \geq 2$. Intuitivamente, podemos pensar que esta afirmación dice que ninguna curva cerrada en S^n con $n \geq 2$ rodea a un agujero bidimensional, ya que si lo hiciera, no podríamos encogerla atravesando el agujero.

Sin embargo, hay obviamente un agujero en la esfera. Ese es el agujero tridimensional encerrado por la esfera. Podemos entender esto utilizando las

ideas anteriores diciendo que hay aplicaciones continuas $S^2 \rightarrow S^2$ que no pueden ser encogidas a un punto, o más formalmente que no son homótopas a una aplicación constante (por ejemplo, la “aplicación identidad” que envía cada punto de S^2 a sí mismo). De nuevo, podemos hacer más sencilla la situación considerando únicamente clases de homotopía de aplicaciones (esto es, considerando un solo representante por cada clase de homotopía) en lugar de todas las aplicaciones.

Aunque claramente no hay más agujeros que detectar en S^2 , no hay nada que nos impida extrapolar las ideas anteriores a clases de homotopía de aplicaciones $S^n \rightarrow S^2$ para $n \geq 3$. Aunque quizá no es obvio, esto resulta ser interesante y revela aspectos sutiles de la topología. Esta línea de investigación se remonta al año 1931 cuando Heinz Hopf descubrió la existencia de una aplicación de S^3 en S^2 (ahora conocida como fibración o aplicación de Hopf) que no es homótopa a una aplicación constante [7].

El cálculo de clases de homotopía de aplicaciones de esferas a otros espacios es normalmente difícil, pero pueden calcularse en algunos casos importantes. Una característica buena de las clases de homotopía de aplicaciones es que vienen equipadas con una estructura algebraica natural: para una esfera dada S^n y un espacio de llegada X , el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $S^n \rightarrow X$ forman un *grupo* (un objeto algebraico básico) denotado como $\pi_n(X)$. Este grupo es llamado grupo de homotopía de dimensión n de X , y cuando n es igual a uno es llamado *grupo fundamental* de X . (Hemos omitido algunos detalles técnicos de la definición de grupos de homotopía, sin embargo, lo anterior puede considerarse preciso siempre que X sea conexo por caminos, es decir, que cualesquiera dos puntos de X se puedan unir mediante una curva continua). Observemos que hemos argumentado anteriormente que el grupo fundamental de la esfera S^n es trivial (es decir, consiste en un solo elemento) para $n \geq 2$.

Para proporcionar un ejemplo diferente considere un toro, es decir, la frontera de una rosquilla, o el tubo interior de un neumático. Hay una curva cerrada obvia que recorre una vez la parte más interna del toro. No es difícil ver que esta curva, en contraste con todas las curvas cerradas en la esfera, no es homótopa a una curva cerrada constante. De hecho, pensándolo un poco más uno puede encontrar un número infinito de curvas cerradas en el toro que no son homótopas a una curva constante ni homótopas la una con la otra, véase la Figura 3. Por lo tanto, el grupo fundamental del toro no es trivial, y hemos encontrado una herramienta que nos permite distinguir entre la topología de las esferas y la de los toros.

La pregunta ahora es: ¿qué podemos decir sobre los grupos de homotopía de los espacios de métricas con curvatura escalar positiva? ¿Pueden ser grupos no triviales? Y si es así, ¿cuáles son?, ¿qué tan no triviales? La respuesta fácil

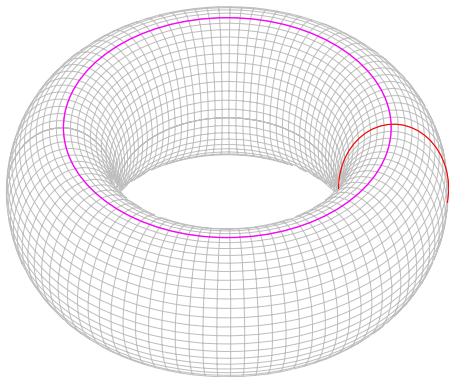


Figura 3: Un toro con dos curvas cerradas.

es que sí, estos grupos pueden ser no triviales y en algunos casos altamente no triviales; sin embargo, nuestra comprensión de tales fenómenos está lejos de ser completa. La respuesta más completa hasta la fecha considera variedades “spin” de dimensiones mayores o iguales a seis que admiten métricas con curvatura escalar positiva. Los grupos de homotopía $\pi_k(\mathcal{R}^+(M))$ de estas variedades M son no triviales para infinitos valores de k [2]. Para algunos grupos π_k sabemos que son no triviales, para otros sabemos incluso que son grupos infinitos, y para otros no sabemos ni siquiera si son triviales o no.

Tomando todo esto en cuenta, el espacio de métricas con curvatura escalar positiva de una variedad tendrá típicamente una estructura topológica muy complicada. Los resultados del grupo de homotopía pueden sugerir que las componentes por caminos de este espacio toman la forma de un extraño tipo de queso suizo, con agujeros en un rango infinito de dimensiones. ¡Esto es mucho más complicado de lo que la analogía con la sopa minestrone podría hacernos creer! De hecho, es probable que el espacio de métricas con curvatura escalar positiva sea aún más complicado de lo que el estudio de grupos de homotopía es capaz de detectar. Por supuesto, esto hace más sorprendente el resultado de que el espacio de métricas de S^2 con curvatura escalar positiva es contráctil.

Para concluir este artículo, volvamos nuevamente a la pregunta (aparentemente más sencilla) acerca de si el espacio de métricas con curvatura escalar positiva es conexo dentro del espacio de todas las métricas. El hecho de que tengamos una respuesta negativa en S^{4k+3} para todo $k \geq 1$ no es una coincidencia. De hecho, hay evidencia de que en dimensiones grandes la topología de $\mathcal{R}^+(S^n)$ debe ser periódica en n , con un período de 8.

Entonces es natural preguntarse si el espacio de métricas con curvatura escalar positiva en la esfera de dimensión tres, S^3 , es también no conexo. El método

usado en la demostración para el caso S^{4k+3} requiere técnicas de topología de alta dimensión que no funcionan en dimensión tres. De hecho, paradójicamente, la topología de variedades de dimensiones mayores o iguales a 5 es mucho más fácil que la de variedades de dimensiones 3 y 4, a pesar de que estas últimas están más estrechamente relacionadas con la realidad física. Sin embargo, en un espectacular resultado de 2012, Marques [9] demostró que el espacio $\mathcal{R}^+(S^3)$ es conexo. El método de prueba sugiere que quizás $\mathcal{R}^+(S^3)$ sea contráctil [6].

¿Cómo se puede estudiar la topología de $\mathcal{R}^+(S^3)$? La respuesta es mediante el uso de dos ingredientes. En primer lugar podemos analizar el subconjunto especial de métricas con curvatura seccional constante igual a 1. Usando resultados de [6] se puede deducir que este conjunto es contráctil. El segundo ingrediente utiliza el *flujo de Ricci* [7]. Comenzando con una métrica riemanniana $g(0)$ en S^3 , podemos dejar que evolucione mediante la ecuación diferencial $\frac{dg(t)}{dt} = -2\text{Ric}_{g(t)}$, donde $\text{Ric}_{g(t)}$ es la curvatura de Ricci de la métrica $g(t)$ que cambia con el tiempo, y donde $g(t)$ y $\text{Ric}_{g(t)}$ son vistos como tensores (básicamente como matrices). El efecto de este flujo es “suavizar” la métrica inicial de manera que sea cada vez más redonda y parecida a una esfera con la métrica estándar. Sucede que se puede mostrar fácilmente que bajo el flujo de Ricci la curvatura escalar solo puede crecer. Entonces el flujo de Ricci preserva al espacio $\mathcal{R}^+(S^3)$.

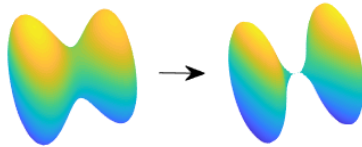


Figura 4: Representación del flujo de Ricci en S^3 con una métrica con curvatura escalar positiva. La “pesa” se separa en dos esferas más pequeñas.

Uno podría esperar, por lo tanto, que el flujo de Ricci contraiga a $\mathcal{R}^+(S^3)$ al espacio de métricas con curvatura constante 1, que es contráctil y, por lo tanto, $\mathcal{R}^+(S^3)$ sería contráctil. Desafortunadamente esta idea es demasiado

[6] Bamler y Kleiner recientemente (septiembre de 2019) subieron un artículo a arXiv donde demuestran que el espacio de métricas de curvatura escalar positiva de una 3 variedad es vacío o contráctil [1]. (N. de las T.)

[7] Empleado para probar la *Conjetura de Poincaré*, que hablando a grandes rasgos, dice que una variedad 3-dimensional que desde el punto de vista de grupos de homotopía se parece a una 3-esfera es realmente una 3-esfera. (N. de las T.)

ingenua, ya que en general el flujo de Ricci $g(t)$ de una métrica $g(0)$ casi siempre desarrolla singularidades y varios “cuellos” se estrangulan (ver Figura 4). Aún así, existe la esperanza de que, controlando suficientemente las singularidades, una modificación de la idea anterior funcione.

Referencias

- [1] Richard H. Bamler y Bruce Kleiner, *Ricci flow and contractibility of spaces of metrics*, arXiv:1909.08710 [math.DG] (2019), 111.
- [2] Boris Botvinnik, Johannes Ebert y Oscar Randal-Williams, *Infinite loop spaces and positive scalar curvature*, *Invent. Math.* **209** (2017), n^o 3, 749–835.
- [3] Albert Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (On the General Theory of Relativity)*, *Sitzungsberichte Königlich Preuss. Akad. Wissen.* (1915), <http://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/110>, available with translation in *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 6, The Berlin Years: Writings, 1914–1917, document 21, Edited by Martin J. Klein, A. J. Kox, and Robert Schulman, Princeton Univ. Press, 1996.
- [4] Paul Erdős y George Purdy, *Extremal problems in combinatorial geometry*, *Handbook of Combinatorics*, Vol. 1, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 1995, págs. 809–874. MR 1373673
- [5] Mikhael Gromov y H. Blaine Lawson, Jr., *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1983), n^o 58, 83–196 (1984), ISSN 0073-8301, http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1983__58__83_0. MR 720933
- [6] Allen E. Hatcher, *A proof of the Smale conjecture*, *Diff(S³) ≃ O(4)*, *Ann. of Math.* (2) **117** (1983), n^o 3, 553–607, ISSN 0003-486X, <https://doi-org.proxy-um.researchport.umd.edu/10.2307/2007035>. MR 701256
- [7] Heinz Hopf, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, *Math. Ann.* **104** (1931), n^o 1, 637–665.
- [8] Joachim Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, *Annals of Mathematics* **140** (1994), n^o 3, 655–683. MR 1307899
- [9] Fernando Codá Marques, *Deforming three-manifolds with positive scalar curvature*, *Ann. of Math.* (2) **176** (2012), n^o 2, 815–863, ISSN 0003-486X, <https://doi-org.proxy-um.researchport.umd.edu/10.4007/annals.2012.176.2.3>. MR 2950765

- [10] John Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **63** (1956), 20–63. MR 0075639
- [11] Bernhard Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, lecture delivered 1854, published 1868, <http://www.emis.de/classics/Riemann/>, visitado el 26 de junio de 2000, available with translation by W. K. Clifford.
- [12] Jonathan Rosenberg, *Manifolds of positive scalar curvature: a progress report*, Surveys in differential geometry. Vol. XI, Surv. Differ. Geom., vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007, págs. 259–294, <https://doi-org.proxy-um.researchport.umd.edu/10.4310/SDG.2006.v11.n1.a9>. MR 2408269
- [13] Jonathan Rosenberg y Stephan Stolz, *Metrics of positive scalar curvature and connections with surgery*, Surveys on surgery theory, Vol. 2, Ann. of Math. Stud., vol. 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001, págs. 353–386. MR 1818778
- [14] Richard Schoen y Shing Tung Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), nº 1, 45–76, ISSN 0010-3616, <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103904790>. MR 526976
- [15] ———, *Proof of the positive mass theorem. II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), nº 2, 231–260, ISSN 0010-3616, <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103908964>. MR 612249
- [16] Edward Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), nº 3, 381–402, ISSN 0010-3616, <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103919981>. MR 626707

Jonathan Rosenberg *ocupa la cátedra Ruth M. Davis como profesor de matemáticas en la Universidad de Maryland.*

David Wraith *es profesor de matemáticas en la Universidad Nacional de Irlanda, Maynooth.*

Traducido del inglés por
Raquel Perales Aguilar y
Areli Vázquez Juárez

Tema matemático
Geometría y Topología

Conexiones con otras áreas
Física

Licencia
Creative Commons BY-SA 4.0

DOI
10.14760/SNAP-2019-004-ES

Las *Instantáneas de la actualidad matemática desde Oberwolfach* ofrecen una mirada a investigación matemática más reciente. Estos textos están escritos por los participantes en el programa científico del Instituto de Investigación Matemática de Oberwolfach (MFO). El proyecto de las instantáneas está concebido para promover el conocimiento y el aprecio por la matemática moderna y la investigación matemática entre todo el público interesado internacionalmente.

Todas las instantáneas se publican en cooperación con la plataforma IMAGINARY y pueden encontrarse en www.imaginary.org/es/snapshots y en www.mfo.de/snapshots.

ISSN 2626-1995

Editora

Sara Munday
junior-editors@mfo.de

Editora en jefe

Sophia Jahns
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Alemania

Director
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



IMAGINARY
open mathematics