

# Das Problem der Kugelpackung

---

Maria Dostert • Stefan Krupp  
Jan Hendrik Rolfes

Wie würdest du Tennisbälle oder Orangen stapeln? Oder allgemeiner formuliert: Wie dicht lassen sich identische 3-dimensionale Objekte überschneidungsfrei anordnen? Das Problem, welches auch Anwendungen in der digitalen Kommunikation hat, hört sich einfach an, ist jedoch für Kugeln in höheren Dimensionen noch immer ungelöst. Sogar die Berechnung guter Näherungslösungen ist für die meisten Dimensionen schwierig.

## 1 Kugelpackungen

Jeder der schon einmal Plätzchen auf ein Backblech gelegt hat oder Bauklötze in eine Kiste geräumt hat, hat sich mit Packungsproblemen in zwei oder drei Dimensionen beschäftigt. Wir fragen nach der *dichtesten* Packung, oder genauer gesagt nach *einer* dichtesten Packung. Handelt es sich bei den zu packenden Objekten um  $n$ -dimensionale Kugeln, so entspricht die obige Frage dem bekannten *Kugelpackungsproblem*. Zwei Möglichkeiten, Kugeln in Dimension  $n = 3$  zu packen, sind in *Abbildung 1* dargestellt.

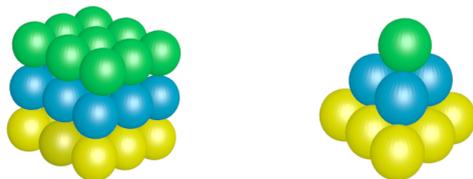


Abbildung 1: Zwei unterschiedliche Kugelpackungen.

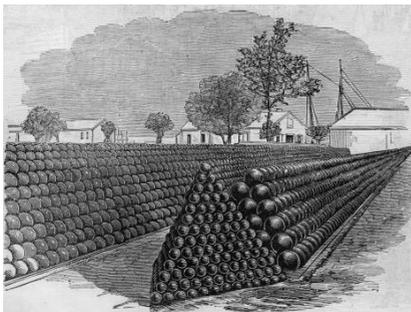
Die rechte Variante aus **Abbildung 1** wäre eine Möglichkeit, Kanonenkugeln zu stapeln, was uns zur historischen Herkunft des Kugelpackungsproblems führt. Ende der 1590er-Jahre beauftragte Sir Walter Raleigh den Mathematiker Thomas Hariot mit der Frage, wie viele Kugeln sich in einer vorgegebenen Anordnung befinden. Hariot dachte jedoch weiter und fragte sich, wie man die Anzahl der Kanonenkugeln in einem Schiff maximieren kann (**Abbildung 2(a)**), woraus die Formulierung des Kugelpackungsproblems entstand. Angeregt durch einen Briefwechsel mit Hariot Anfang des 17. Jahrhunderts, beschäftigte sich der Mathematiker und Astronom Johannes Kepler ebenfalls mit diesem Problem. Er kam 1611 zu der Überzeugung, dass die rechte Variante aus **Abbildung 1** der dichtesten 3-dimensionalen Kugelpackung entspricht [5]. Hierbei ist also die Kugelpackung gemeint, welche die rechte Variante aus der Abbildung in alle Richtungen fortsetzt. Ein Beweis der Korrektheit dieser Vermutung gelang allerdings erst fast 390 Jahre später durch den Mathematiker Thomas Hales (**Abbildung 2(b)**) und seinen Doktoranden Samuel Ferguson. Um zu zeigen, dass die beschriebene Kugelpackung eine dichteste Anordnung ist, muss man zeigen, dass keine andere Anordnung dichter ist. Die Schwierigkeit hierbei liegt unter anderem darin, dass es unendlich viele mögliche Kugelpackungen gibt. Hales und Ferguson gelang der Beweis der Keplerschen Vermutung 1998 auf 300 Seiten mit Hilfe eines Computerprogramms, welches über 50.000 Zeilen umfasst. <sup>[1]</sup>

## 2 Moderne Methoden für Kugelpackungen

Das Kugelpackungsproblem ist ein schwieriges Optimierungsproblem: im Allgemeinen lässt sich die exakte optimale Dichte nicht effizient berechnen. Mittels verschiedener Methoden ist es jedoch möglich, effizient überschneidungsfreie Kugelpackungen zu konstruieren, deren Dichte eine Annäherung an die optimale

---

<sup>[1]</sup> Unter dem Namen *Flyspeck* wurde dieser Beweis 2014 sogar von Thomas Hales *formalisiert*. Dabei wird die Korrektheit des Beweises durch ein Computerprogramm überprüft. Andere Beispiele für Sätze, deren Beweise formalisiert wurden sind der Vier-Farben-Satz und der Satz von Feit–Thompson. Mehr Informationen über dieses interessante Thema findest du hier: [10]. Einen Zeitungsbericht über den Beweis der Kepler-Vermutung findet sich hier: [6].



(a) Packung von Kanonenkugeln.



(b) Thomas Hales.

Abbildung 2

Dichte von unten, also eine untere Schranke für die optimale Dichte liefert. Zur Berechnung einer Annäherung an die optimale Dichte von oben, also einer oberen Schranke, sind spezielle mathematische Methoden notwendig, welche diese effizient berechnen können. Hierbei ist zu zeigen, dass keine Kugelpackung dichter als die gefundene obere Schranke ist. Es ist besonders erstrebenswert, dass die untere und die obere Schranke dicht beieinander liegen.

Wir wollen zunächst Beispiele für untere Schranken geben und dann eine Methode skizzieren, mit der man obere Schranken erhalten kann.

## 2.1 Untere Schranken mittels Gitterpackungen

Eine Möglichkeit untere Schranken zu bestimmen bieten Gitterpackungen, welche auf einem Gitter

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit linear unabhängigen Vektoren  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  basieren. Die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  nennen wir *Basisvektoren* oder *Basis* des Gitters. Wir fassen je einen Gitterpunkt als Mittelpunkt einer Kugel auf. Wählt man als Radius  $r$  aller dieser Kugeln die Hälfte der minimalen Länge der nicht-trivialen Gittervektoren, also

$$r := \frac{1}{2} \min_{v \in L \setminus \{0\}} \|v\|,$$

so bilden diese Kugeln eine Kugelpackung.

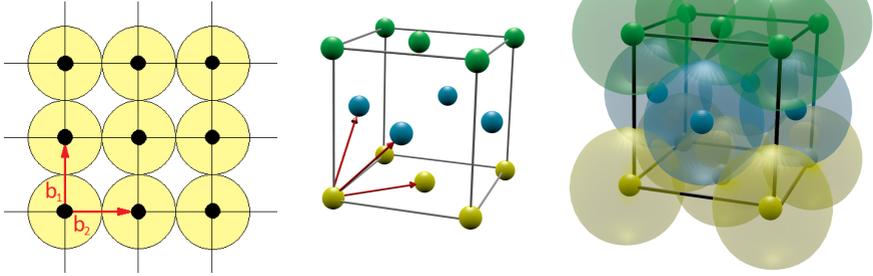


Abbildung 3: Gitterpackungen in Dimension 2 und 3. Basisvektoren sind in rot dargestellt.

Formal ist das Gitter für die 3-dimensionale Packung in Abbildung 3 definiert als

$$D_3 := \left\{ a_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In der mittleren Abbildung sind lediglich die entsprechenden Gitterpunkte markiert, wohingegen die rechte Abbildung die zugehörige Kugelpackung darstellt. Diese entspricht der Anordnung von Kepler und ist, wie Hales und Ferguson zeigen konnten, mit einer Dichte von  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$  bzw. 74,048...% optimal.

Ein interessantes 8-dimensionales Gitter ist das  $E_8$ -Gitter mit

$$E_8 := \sqrt{2} \left\{ x \in \mathbb{R}^8 : x \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)^8, \sum_{i=1}^8 x_i \in 2\mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^8 a_i b_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

wobei die Basisvektoren  $b_i$  als Spalten der folgenden Matrix aufgefasst werden können:

$$\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gitter hat die Eigenschaft, dass es mit einer Dichte von  $\frac{\pi^4}{384}$  bzw. 25,366...% vermutlich eine dichteste Kugelpackung im 8-dimensionalen Raum beschreibt; siehe [4, S. 121]. Die vorgestellten Gitter  $D_3$  und  $E_8$  haben als minimale Länge eines nichttrivialen Gittervektors den Wert 2 und somit bestehen die zugehörigen Kugelpackungen aus Kugeln mit Radius 1 (Einheitskugeln).

## 2.2 Obere Schranken mittels semidefiniter Optimierung

Dieser Abschnitt setzt einige weitere Grundbegriffe der Linearen Algebra und der Optimierung voraus. Weiter unten werden die Ergebnisse der vorgestellten Methode beschrieben; hierbei ist es ganz erstaunlich wie nah in einigen Fällen die oberen Schranken an den unteren Schranken sind.

Eine Möglichkeit zur Berechnung oberer Schranken bietet die *semidefinite Optimierung*, welche die lineare Optimierung von Vektoren auf Matrizen verallgemeinert. Ein *semidefinites Optimierungsproblem* hat die Form

$$s_{\max} := \max_{X \in \mathcal{S}_{\geq 0}^n} \{ \langle C, X \rangle : \langle A_i, X \rangle = b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \},$$

wobei die Eingabe aus dem Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  und den symmetrischen Matrizen  $A_i$  und  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besteht und  $n$  und  $m$  natürliche Zahlen sind. Weiterhin ist das benutzte *Frobenius-Skalarprodukt*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert als  $\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}$ . Die gesuchte Matrix  $X$  befindet sich hierbei in der Menge der positiv semidefiniten Matrizen, die definiert ist als

$$\mathcal{S}_{\geq 0}^n := \{ X : X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch, } x^T X x \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \}$$

und die Eigenschaft hat, dass die enthaltenen Matrizen keine negativen Eigenwerte besitzen. Die große Stärke der semidefiniten Optimierung besteht darin, dass sich solche Probleme im Allgemeinen in „polynomieller Zeit“ lösen lassen. Das bedeutet insbesondere, dass in vielen Fällen der Computer in der Lage ist eine Lösung des Problems zu berechnen.

Zur Annäherung der optimalen Dichte mit Hilfe von semidefiniter Optimierung ist zusätzlich der Begriff der Unabhängigkeitszahl hilfreich. Für einen endlichen Graphen  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  ist die *Unabhängigkeitszahl*  $\alpha(G)$  definiert als die maximale Anzahl von Knoten, die paarweise nicht durch eine Kante verbunden sind. In **Abbildung 4** ist am Beispiel des sogenannten *Petersen-Graphen* eine maximale unabhängige Menge in rot dargestellt.

Für jede Wahl von 5 Knoten finden sich mindestens 2, die durch eine Kante verbunden sind. Folglich hat die Unabhängigkeitszahl dieses Graphen den Wert 4. Teilt man diese durch die Knotenzahl  $|V|$ , so erhält man die *maximale Dichte*  $\delta = \frac{1}{|V|} \cdot \alpha(G) = 0,4$ . Um eine Teilmenge von Knoten mathematisch zu beschreiben, ist der Begriff des *charakteristischen Vektors* hilfreich. Dies ist ein aus Nullen und Einsen bestehender Vektor  $x$ , wobei jede Komponente  $x_i$  beschreibt, ob der entsprechende Knoten  $i$  in der Teilmenge enthalten ist ( $x_i = 1$ ) oder nicht ( $x_i = 0$ ). Die Unabhängigkeitszahl eines Graphen  $G = (V, E)$

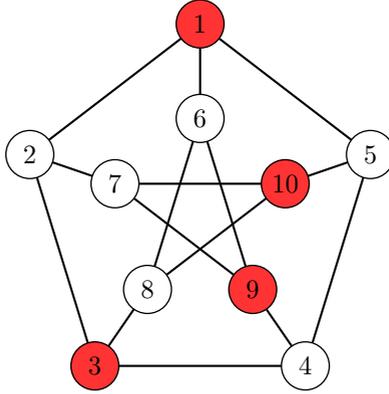


Abbildung 4: Eine maximale unabhängige Menge des Petersen-Graphen sind die Knoten 1, 3, 9 und 10.

ergibt sich somit als:

$$\alpha(G) = \max_{x \in \mathbb{R}^V} \sum_{i \in V} x_i^2$$

$$x_i^2 - x_i = 0 \quad \text{für alle Knoten } i \in V \quad (1)$$

$$x_i x_j = 0 \quad \text{für alle Kanten } \{i, j\} \in E. \quad (2)$$

Gleichung (1) stellt sicher, dass  $x$  ein charakteristischer Vektor ist: Wenn  $0 = x_i^2 - x_i = x_i(x_i - 1)$ , dann gilt  $x_i = 1$  oder  $x_i = 0$ . Darüber hinaus stellt Gleichung (2) sicher, dass zwischen je zwei Knoten keine Kante existiert und somit die resultierende Menge unabhängig ist.

Zu dem Beispiel aus Abbildung 4 gehört der charakteristische Vektor:

$$x = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T.$$

Die Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  lässt sich mit Hilfe des semidefiniten Programms

$$\vartheta(G) := \max_{X \in \mathcal{S}_{\geq 0}^n} \{ \langle J, X \rangle : \langle I, X \rangle = 1 \text{ und } X_{i,j} = 0 \text{ für alle Kanten } \{i, j\} \in E \}$$

abschätzen. Hierbei bezeichnet  $J$  die Einsmatrix, also mit Einträgen

$$J_{i,j} := 1 \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n$$

und  $I$  die Einheitsmatrix, also mit Einträgen

$$I_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Auch der Eintrag  $X_{i,j}$  von  $X$  kann als Frobenius-Skalarprodukt von  $X$  mit der Matrix, bei der der Eintrag  $i,j$  eine 1 ist und bei der sonst alle Einträge 0 sind, geschrieben werden. Die Abschätzung  $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$  ergibt sich wie folgt: Definiert  $x$  den charakteristischen Vektor zu einer maximalen unabhängigen Menge, so können wir überprüfen, dass die Matrix

$$\tilde{X} := \frac{1}{\|x\|^2} x(x^T)$$

eine zulässige Lösung für das semidefinite Programm darstellt. Es gilt

- $\langle I, \tilde{X} \rangle = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{i,i} = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n x_i x_i = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1$  und
- $X_{i,j} = x_i x_j = 0$  für alle Kanten  $\{i, j\}$ , wegen Gleichung (2).

Für den Zielfunktionswert gilt

$$\begin{aligned} \langle J, \tilde{X} \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{X}_{i,j} = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\|x\|^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha(G), \end{aligned}$$

wobei wir vom Übergang der ersten zur zweiten Zeile Gleichung (1), also  $x_i = x_i^2$ , benutzen. Somit ergibt sich wie behauptet  $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$ . Für das Beispiel, welches zu **Abbildung 4** gehört ergibt sich aus dem charakteristischen Vektor  $x$ :

$$\tilde{X} = \frac{1}{\|x\|^2} x(x^T) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und  $\langle J, \tilde{X} \rangle = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ . Man kann sogar zeigen, dass für den Petersen-Graphen die Gleichung  $\alpha(G) = \vartheta(G)$  gilt.

Wir können also semidefinite Optimierung dafür nutzen, die größte und somit dichteste unabhängige Teilmenge in einem Graphen zu finden. Ganz ähnlich kann man semidefinite Optimierung dazu benutzen, eine bestimmte Art von Kugelpackungen, nämlich die *periodischen Packungen*, zu optimieren.

Man bezeichnet eine Packung  $P$  als *periodisch*, falls ein Gitter

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit Basisvektoren  $b_1, \dots, b_n$  existiert, so dass  $P = v + P$  für alle Elemente  $v \in L$  gilt. Das bedeutet, die Packung bleibt unverändert, wenn man sie entlang des Gitters verschiebt.

Es müssen aber nicht alle Elemente in der Packung  $P$  auch in dem Gitter  $L$  enthalten sein; siehe zum Beispiel die **grünen** Kreisscheiben in **Abbildung 5**. Somit repräsentiert also jedes Objekt  $x \in P$  alle Objekte der Menge  $[x] = \{v + x : v \in L\}$ . Eine zum Gitter  $L$  gehörige Fundamentalzelle ist definiert als

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : a_i \in [0, 1) \right\}.$$

Der Schnitt  $M \cap P$  enthält immer genau einen Repräsentanten der Mengen  $[x]$  für alle  $x \in P$ .

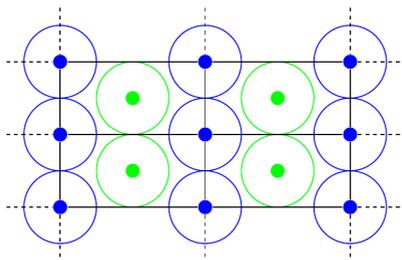
In der nachfolgenden Abbildung ist als Beispiel eine 2-dimensionale periodische Kugelpackung für das Gitter

$$L = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

dargestellt. Zur Berechnung der Dichte dieser Packung von Kreisscheiben vom Radius 1 reicht es aus, alle Kugelmittelpunkte in der Fundamentalzelle

$$M = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : 0 \leq a_1 < 1 \text{ und } 0 \leq a_2 < 1 \right\}$$

zu betrachten, da sich diese Anordnung periodisch fortsetzt.



**Abbildung 5:** Periodische Packung entlang des Gitters  $L$ , wobei  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  die **blauen** Kreisscheiben und  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  die **grünen** Kreisscheiben definiert.

In **Abbildung 5** entspricht dies den Punkten  $\binom{0}{0}$  und  $\binom{2}{1}$ , und es ergibt sich eine Dichte von  $\frac{\text{vol}(B_1)}{\text{vol}(M)} \cdot 2 = \frac{\pi}{4}$ . Hierbei bezeichnet  $B_1$  eine Kreisscheibe vom Radius 1 und  $\text{vol}(B_1)$  deren Fläche. Bei höherdimensionalen Gittern bezeichnet  $B_1$  eine  $n$ -dimensionale Kugel vom Radius 1 und  $\text{vol}(B_1)$  deren  $n$ -dimensionales Volumen.

Allgemein definieren wir einen Kugelpackungs- oder kurz  $KP$ -Graphen  $G_{KP} = (V_{KP}, E_{KP})$  mit der (unendlichen!) Knotenmenge  $V_{KP} := M$  und der Kantenmenge

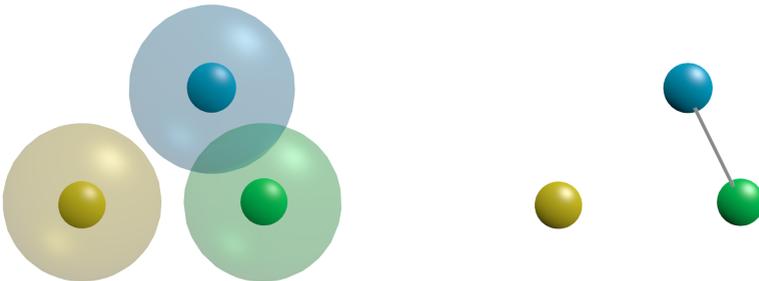
$$E_{KP} := \{\{x, y\} : x, y \in V_{KP} \text{ und es gibt ein } v \in L, \text{ sodass } d(x, y + v) < 2\}.$$

Der Graph  $G_{KP}$  ist so konstruiert, dass die Mittelpunkte der überschneidungsfreien Einheitskugeln eine unabhängige Menge in  $G_{KP}$  bilden. Analog zum endlichen Fall lässt sich die maximale Dichte  $\delta$  mit Hilfe der Unabhängigkeitszahl  $\alpha(G)$  definieren als

$$\delta = \frac{\text{vol}(B_1)}{\text{vol}(V_{KP})} \cdot \alpha(G_{KP}).$$

Das semidefinite Programm zur Berechnung von  $\vartheta(G)$  lässt sich ebenfalls auf unendliche Graphen übertragen, so dass man eine obere Schranke von  $\frac{\text{vol}(B_1)}{\text{vol}(V_{KP})} \cdot \vartheta(G_{KP})$  für die maximale Dichte  $\delta$  erhält.

Durch das Anpassen des „dualen“ Programms für  $\vartheta(G_{KP})$  erhält man eine verbesserte obere Schranke  $\vartheta'(G_{KP})$ . Es gilt  $\alpha(G_{KP}) \leq \vartheta'(G_{KP}) \leq \vartheta(G_{KP})$  und somit erhalten wir eine bessere obere Schranke von  $\frac{\text{vol}(B_1)}{\text{vol}(V_{KP})} \cdot \vartheta'(G_{KP})$  für die optimale Dichte einer Kugelpackung mit Fundamentalzelle  $M$ . Man kann das duale Programm auch erweitern, so dass es für beliebige Fundamentalzellen eine obere Schranke liefert [7].



**Abbildung 6:** Teilgraph von  $G_{KP}$  mit 3 Knoten.

Die oberen Schranken, die sich mit dieser Methode finden lassen, sind in manchen Dimensionen verblüffend nah an den unteren Schranken. Henry Cohn und Abhinav Kumar [2] konnten Folgendes zeigen: Für die Dimension 8 liefert das  $E_8$ -Gitter die untere Schranke von  $\frac{\pi^4}{384} = 0,25366\dots$ , während die obere Schranke  $(1 + 10^{-14}) \cdot \frac{\pi^4}{384}$  beträgt. Ein weiterer prägnanter Fall findet sich in Dimension 24. Die untere Schranke wird mit Hilfe des sogenannten *Leech-Gitters* [4] bestimmt und beträgt  $\frac{\pi^{12}}{12!} = 0,00192\dots$ . Mit Hilfe der semidefiniten Programmierung erhält man analog zum 8-dimensionalen Fall eine obere Schranke von  $(1 + 1,65 \cdot 10^{-30}) \cdot \frac{\pi^{12}}{12!}$ . In beiden Fällen scheint es also sehr plausibel zu sein, dass die angegebenen Gitter tatsächlich dichteste Packungen sind, wenngleich es dafür bis jetzt keinen Beweis gibt. Obwohl die Güte der Schranken im Allgemeinen nicht so gut wie in den Dimensionen 8 und 24 ist, findet man mit den hier vorgestellten Verfahren sowohl Schranken für das Packen von Kugeln jeglicher Dimension, als auch für das Packen nicht-kugelförmiger Objekte.

Derartige Packungsprobleme finden auch Anwendung in der modernen Kommunikation. Dabei möchte man Signale über einen gestörten Kanal senden, also beispielsweise über eine schlechte Telefonleitung. Die verschiedenen Signale kann man sich bei diesem Beispiel als verschiedene Töne vorstellen. Wenn die Töne zu ähnlich sind, dann kann man sie nach der Übertragung nicht mehr unterscheiden; das möchte man vermeiden. Man übersetzt dann diese Signale in Punkte im  $n$ -dimensionalen Raum. Damit zwei verschiedene Signale nach der Übertragung, bei der sie gestört werden, noch unterscheidbar sind, wählt man sie so, dass sie sich gut unterscheiden lassen, also im  $n$ -dimensionalen Raum einen gewissen Mindestabstand haben. Das bedeutet, dass es um jedes Signal eine Kugel gibt, in der kein anderes Signal liegt. Nun möchte man möglichst viele verschiedene Signale übertragen können, also diese Sphären möglichst dicht packen.

Natürlich dachte Johannes Kepler nicht an Anwendungen in der modernen Kommunikation als er sich mit Kugelpackungen beschäftigte. Mehr über die Keplersche Vermutung findest du in dem zugänglichen Buch von George Szpiro, welches auch in deutscher Übersetzung vorliegt [8].

#### Nachtrag des Editors:

Kurz vor Veröffentlichung dieses Schnappschusses legte Maryna Viazovska einen Beweis dafür vor, dass eine optimale Kugelpackung in Dimension 8 tatsächlich durch das  $E_8$ -Gitter gegeben ist [9]. Auf ihren Durchbruch aufbauend folgte ein paar Tage später ein Beweis für die Optimalität des Leech-Gitters in Dimension 24 von Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko und Maryna Viazovska [3]. Beide Beweise benutzten die Methode von Henry Cohn und Noam Elkies [1] zusammen mit Quasi-Modulformen aus der analytischen Zahlentheorie.

## Bildquellen

- Abb. 2(a) Harpers Weekly, June 29, 1861, p. 406 <http://www.sonofthesouth.net/leefoundation/civil-war/1861/june/slave-whipping-post.htm>, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fortres\\_Monroe\\_1861\\_-\\_Cannon-balls.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fortres_Monroe_1861_-_Cannon-balls.jpg), besucht am 20. Oktober 2015.
- Abb. 2(b) „Thomas Callister Hales giving a lecture.“ Author: Slawekb. Licensed under Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Halescropped.jpg>, besucht am 20. Oktober 2015.

## Literatur

- [1] H. Cohn und N. Elkies, *New upper bounds on sphere packings I*, Annals of Mathematics 157 (2003), 689–714.
- [2] H. Cohn und A. Kumar, *Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices*, Annals of Mathematics **170** (2009), Nr. 3, 1003–1050.
- [3] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko und M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, arxiv:1603.06518v1, 2016.
- [4] J. H. Conway und N. J. A. Sloane, *Sphere-packings, Lattices, and Groups*, 3. Aufl., Springer, 1999.
- [5] T. C. Hales, *An overview of the Kepler conjecture*, arxiv:math/9811071v2, 1998.
- [6] R. Novotny, *Das Orangen-Projekt*, <http://www.zeit.de/2015/27/mathematik-thomas-hales-computer-algorithmus-johannes-kepler-kuenstliche-intelligenz>, besucht: 19. November 2015.
- [7] F. Oliveira und F. Vallentin, *Mathematical optimization for packing problems*, arxiv:1403.1166v1, 2014.
- [8] G. Szpiro, *Die Keplersche Vermutung*, Springer, 2011.
- [9] M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, arxiv:1603.04246v1, 2016.
- [10] Wikipedia, *Maschinengestütztes Beweisen*, [https://de.wikipedia.org/wiki/Maschinengestütztes\\_Beweisen](https://de.wikipedia.org/wiki/Maschinengestütztes_Beweisen), besucht: 19. November 2015.

Maria Dostert ist Doktorandin am  
Lehrstuhl diskrete Mathematik und  
Optimierung an der Universität zu Köln.

Stefan Krupp ist Masterstudent in  
Wirtschaftsmathematik an der Universität  
zu Köln.

Jan Hendrik Rolfes ist Doktorand am  
Lehrstuhl diskrete Mathematik und  
Optimierung an der Universität zu Köln.

*Mathematische Gebiete*  
Algebra und Zahlentheorie, Diskrete  
Mathematik und Grundlagen, Geometrie  
und Topologie

*Verbindungen zu anderen Gebieten*  
Chemie und Geowissenschaften,  
Informatik, Physik, Betrachtungen über  
Mathematik

*Lizenz*  
Creative Commons BY-SA 4.0

*DOI*  
10.14760/SNAP-2016-004-DE

---

*Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach* werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es begann als Teil des Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung gefördert wird. Das Projekt wurde auch von der Oberwolfach Stiftung sowie vom MFO unterstützt. Alle Schnappschüsse können unter [www.imaginary.org/snapshots](http://www.imaginary.org/snapshots) sowie unter [www.mfo.de/snapshots](http://www.mfo.de/snapshots) abgerufen werden.

---

*Editor*  
Moritz Firsching  
[junior-editors@mfo.de](mailto:junior-editors@mfo.de)

*Chefeditorin*  
Carla Cederbaum  
[senior-editor@mfo.de](mailto:senior-editor@mfo.de)

Mathematisches Forschungsinstitut  
Oberwolfach gGmbH  
Schwarzwaldstr. 9–11  
77709 Oberwolfach  
Deutschland

*Direktor*  
Gerhard Huisken



Mathematisches  
Forschungsinstitut  
Oberwolfach



Klaus Tschira Stiftung  
gemeinnützige GmbH



oberwolfach  
FOUNDATION

IMAGINARY  
open mathematics