

Winkeltreue zahlt sich aus

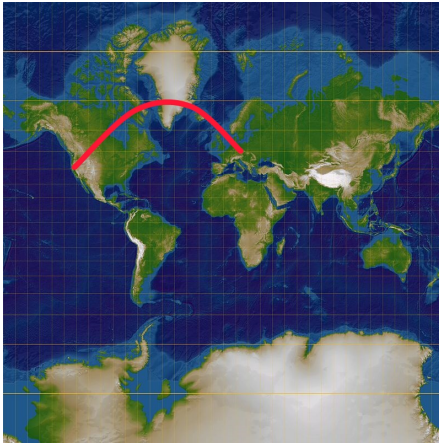
Felix Günther

Nicht nur Seefahrerinnen, auch Computergrafikerinnen und Physikerinnen wissen Winkeltreue zu schätzen. Doch beschränkte Rechenkapazitäten und Vereinfachungen in theoretischen Modellen erfordern es, winkeltreue Abbildungen nur mit einer überschaubaren Datenmenge zu beschreiben. Entsprechende Theorien werden in der diskreten Mathematik untersucht. Im Folgenden lade ich Sie auf eine Reise in die faszinierende Welt der winkeltreuen Abbildungen ein.

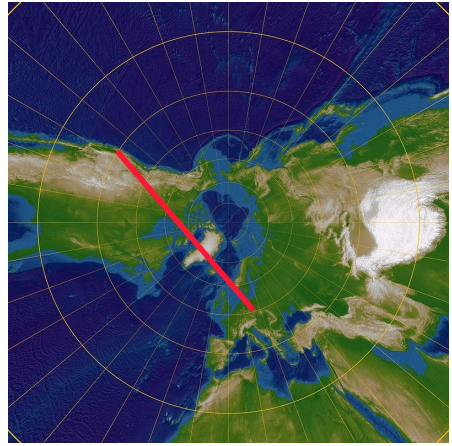
1 Winkeltreue in der Seefahrt und in der Computergrafik

Stellen Sie sich vor, Sie befänden sich in einem Flugzeug, welches Sie von San Francisco zum kürzlich eröffneten Berliner Flughafen BER bringt. Abbildung 1 (a) veranschaulicht Ihnen die Flugroute, die auf dem Monitor vor Ihnen angezeigt wird. Sie mögen sich vielleicht wundern, weswegen der kürzeste Weg in einem großen Bogen über Island und seinen Vulkan Eyjafjallajökull verläuft. Wäre unser aller Leben denn nicht einfacher, wenn wir Karten nutzen würden, auf denen die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten stets eine gerade Strecke wäre? Abbildung 1 (b) zeigt Ihnen eine solche Kartenprojektion, die bereits Thales von Milet im 6. Jahrhundert vor Christus gekannt haben soll. Als *gnomonische Projektion* ist diese *geradentreue* Karte heutzutage Astronominnen und Satellitengeodätinnen ein wichtiges Werkzeug.

Seefahrerinnen in der frühen Neuzeit, die von Satellitennavigation nicht einmal zu träumen wagten, hätten mit einer solchen geradentreuen Karte dagegen nicht viel anfangen können. Um die korrekte Lage ihrer Schiffe auf hoher See



(a) Mercator-Projektion



(b) Gnomonische Projektion

Abbildung 1: Kürzeste Verbindung zwischen San Francisco und Berlin.

bestimmen zu können, standen ihnen meist nur ein Kompass und ein Jakobsstab oder ein Oktant zur Verfügung. Letztere sind beides Vorläufer des Sextanten. Mit diesen Instrumenten konnten sie lediglich Winkel in Bezug auf den Nordpol, Fixsterne und Küstenlinien messen. Daher war es für die Navigation auf hoher See erforderlich, dass die gemessenen Winkel auf der Erde mit denen auf den Seekarten übereinstimmten. Eine solche Karte nennt man *winkeltreu*. Im Jahre 1569 stellte Gerhard Mercator die erste Abbildung der Erdoberfläche vor, die die von Abbildung 2 veranschaulichte Eigenschaft der Winkeltreue besitzt. Diese heutzutage *Mercator-Projektion* genannte Karte können Sie in vielen Atlanten finden. Auch Kartendienste im Internet nutzen die winkeltreue Mercator-Projektion, um die rechten Winkel der meisten Straßenkreuzungen korrekt wiederzugeben. Stellen Sie sich nur einmal vor, wie das Straßennetz von New York aussähe, wenn die Kreuzungen nicht rechtwinklig dargestellt werden würden!

Ideal wäre nun natürlich eine Karte, die gleichzeitig winkel- und geradentreu ist. Doch leider kann es keine Abbildung von der gekrümmten Erde auf ein flaches Blatt Papier geben, die diese beiden Eigenschaften besitzt. Es lässt sich nämlich zeigen, dass eine solche Abbildung *verhältnistreu* wäre und die Erde maßstabsgetreu abbilden würde. Jede, die schon einmal versucht hat, eine Orangenschale platt zu drücken, weiß, dass dies nicht möglich ist. Allerdings besitzen winkeltreue Karten die Eigenschaft, dass die Längenverzerrung an einem Punkt nicht von der Himmelsrichtung abhängt. Daher stimmen die

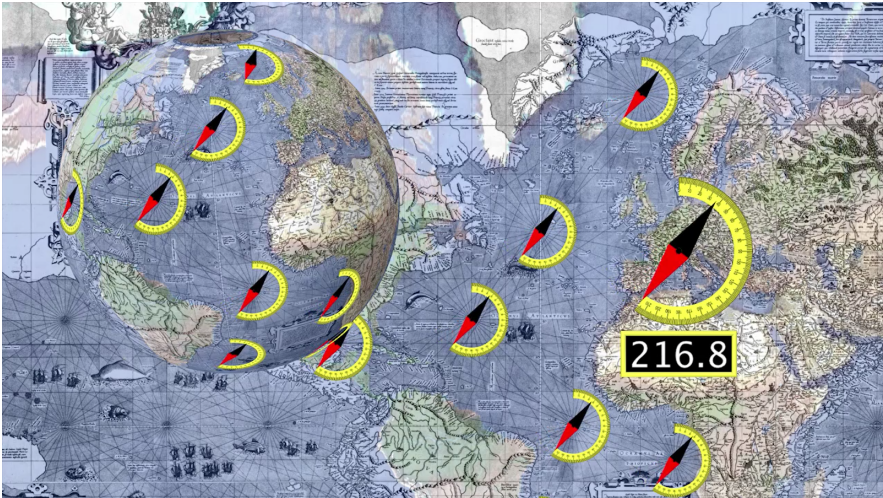


Abbildung 2: Veranschaulichung der Winkeltreue der Mercator-Projektion.

Größenverhältnisse in kleinen Ausschnitten der Karte mit der Realität nahezu überein. Auf größeren Skalen gilt diese Aussage nicht. So wird in der Mercator-Projektion eine Region verhältnismäßig umso größer dargestellt, je näher sie sich an einem der beiden Pole befindet. Obwohl Grönland auf der Karte fast größer als Afrika erscheint, ist es tatsächlich kleiner als das Kongobecken. Aus diesem Grund nutzen internationale Organisationen wie die UNESCO *flächentreue* Kartenabbildungen wie zum Beispiel die *Gall-Peters-Projektion*.

Für diverse Anwendungen in der Computergrafik reicht es aus, wenn sich zumindest die Proportionen von kleinen Formen nur wenig ändern. Aus diesem Grund werden für die Abbildung ebener Bilder auf gekrümmte Flächen, gewissermaßen umgekehrte Kartenabbildungen, oft winkeltreue Darstellungen wie im Falle von Abbildung 3 verwendet. Als Beispiel sei hier die Gestaltung der Oberflächen von dreidimensionalen Objekten in Computerspielen und Animationsfilmen genannt. Um eine höchstmögliche Detailtreue zu erreichen, müssten Computergrafikerinnen mit einer unendlichen Zahl von Punkten rechnen, was jeden Computer überfordern würde. Daher werden die Flächen nur mit einer überschaubaren Zahl an Datenpunkten dargestellt, wie etwa den Gitterpunkten der Längen- und Breitengrade im Falle der Erde. Die Fachfrau nennt dieses Vorgehen *Diskretisierung*. Passionierte Geometerinnen des 19. Jahrhunderts hätten dieses Vorgehen womöglich für eine Diskreditierung der Mathematik gehalten, heutzutage ist es aus der angewandten Mathematik und aus der Kartografie nicht mehr fortzudenken.



Abbildung 3: Winkeltreue Abbilder zweidimensionaler Muster auf Oberflächen.

2 Numerik versus diskrete Differentialgeometrie

Unter den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik befasst sich vornehmlich die Numerik mit dem computergestützten Lösen von mathematischen Problemen, deren genaue Lösung ein Übermaß an Variablen und Daten benötigen würde. Obwohl numerische Methoden sehr effektiv sein können, sind sie manchmal nicht auf die konkrete Fragestellung zugeschnitten und können bereits bei kleinen Ungenauigkeiten in den Eingabedaten große Fehler im Ergebnis hervorrufen. Für geometrisch motivierte Fragestellungen sind daher Verfahren im Vorteil, die sich ebendiese geometrische Struktur zunutze machen. Ein sehr schönes Beispiel hierfür ist die Simulation von Rauch. Auf den ersten Blick wirkt es überraschend, dass die mathematische Beschreibung von Flüssigkeitsströmungen sehr eng mit der von elastischen Stäben und der Bewegung von Kreisel verbunden ist [3]. Just auf dieser Idee basiert ein effizienter Algorithmus zur Berechnung von Flüssigkeitsströmungen, mit welchem die Rauchwolken und Autoabgase im Film *Megamind* simuliert wurden [12].

Zu solchen und weiteren Verfahren, die für spezielle geometrische Probleme zuverlässiger und praktikabler als numerische Techniken sind, gelangen wir mithilfe von neuen Erkenntnissen aus dem noch jungen Feld der *diskreten Differentialgeometrie*. Diese befasst sich mit der geeigneten Diskretisierung von Objekten aus der klassischen Geometrie. Um den Unterschied zwischen den Herangehensweisen der Numerik und der diskreten Differentialgeometrie zu veranschaulichen, möchte ich Ihnen eine Analogie aus dem Alltag vorstellen. Dazu stellen Sie sich bitte vor, dass Sie sich aus Ihrer Wohnung ausgesperrt hätten. Die Numerik wird nun durch den Schlüsseldienst personifiziert, der Ihr Schloss aufbohrt. Dieses Verfahren ist unbestreitbar effektiv und führt selbst dann zum Erfolg, wenn Sie abgeschlossen hätten oder es eigentlich gar nicht

Ihre Tür wäre. Auf der anderen Seite müssen Sie anschließend ein neues Schloss kaufen. Die diskrete Differentialgeometrie hingegen ist Ihre nette Nachbarin von nebenan, von der Sie schon immer einmal wissen wollten, womit sie sich eigentlich beruflich beschäftigt, und die Ihnen die Tür geschickt mit ihrer Kreditkarte öffnet. Dieses Vorgehen bedarf Überlegung und Geduld – Tugenden, wie sie auch in der mathematischen Forschung vonnöten sind. Ihre Nachbarin macht sich die spezielle Situation, dass die Tür nur zugefallen ist, zunutze und erhält die Struktur Ihres Schlosses, sodass Sie Ihre Kreditkarte nachher nicht für den Kauf eines neuen verwenden müssen. Mit Fug und Recht kann die diskrete Differentialgeometrie daher als Schlüsseltechnologie bezeichnet werden.

Natürlich hätte Ihre Nachbarin auch einen Draht oder andere Instrumente verwenden können, um Ihre Tür unbeschadet zu öffnen. Genauso werden in der diskreten Differentialgeometrie verschiedene Diskretisierungen verwandt, die jeweils ihre eigenen Vorzüge und Nachteile haben. So wurde eine diskrete Theorie winkeltreuer Abbildungen entwickelt, die auf *Kreispackungen* beruht [11]. Kreispackungen sind überlappungsfreie Anordnungen von sich berührenden Kreisen. Meine Forschung basiert hingegen auf Zerlegungen der Fläche in Vierecke. Eine diskrete Abbildung bildet hierbei die Eckpunkte der Vierecke der gekrümmten Fläche auf Punkte in der Ebene ab. Winkeltreue ist dadurch definiert, dass sich im Bildviereck die Diagonalen im gleichen Winkel schneiden wie im Ausgangsviereck und ferner das Verhältnis der Längen der beiden Diagonalen erhalten bleibt. Abbildung 4 ist ein Beispiel hierfür. Auf diesem einfachen Gedanken aufbauend arbeite ich an einer umfassenden diskreten Theorie winkeltreuer Abbildungen, die möglichst viele Konzepte der im 19. Jahrhundert begründeten klassischen Lehre auf glatten Flächen bewahrt. Eines Unterschiedes werden wir uns gleich bei der Definition gewahr: Anders als in der klassischen Theorie folgt in der diskreten die gleichmäßige Verzerrung der Diagonalen nicht bereits aus der Erhaltung ihres Schnittwinkels.

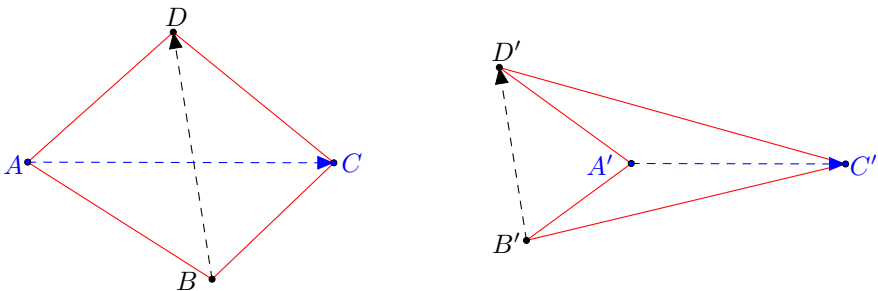


Abbildung 4: Diskrete winkeltreue Abbildung von einem Viereck auf ein anderes.

3 Ein neuer Zugang zu diskreten winkeltreuen Abbildungen

Die Idee, Winkeltreue durch die Wahrung des Schnittwinkels und des Längenverhältnisses der Diagonalen eines jeden Vierecks zu beschreiben, wurde zuerst vor über siebzig Jahren auf die Unterteilung der Ebene in Quadrate angewandt [7]. Später wurden große Fortschritte für Zerlegungen in Rauten erzielt [6, 8, 4]. Erst in den letzten zwanzig Jahren wurden Diskretisierungen gekrümmter Flächen untersucht und Ansätze für die Theorie mit beliebigen konvexen wie auch konkaven Vierecken anstelle von Rauten skizziert [9, 10]. Aufbauend auf diesen Arbeiten fanden wir in dem Artikel [1] einen neuen, intuitiven Zugang zu diskreten winkeltreuen Abbildungen in der Ebene, den wir wenig später auf gekrümmte Flächen erweiterten [2]. Mit diesem Ansatz konnten wir nicht nur die bekannten Resultate wiedergeben und bisherige Notationen zusammenführen, sondern gelangten selbst für die schon zuvor erforschten Spezialfälle zu weiteren Ergebnissen.

Die Kernidee besteht darin, eine zusätzliche Unterteilung der einzelnen Vierecke zu betrachten. Dazu verbinden wir die Mittelpunkte von je zwei benachbarten Seiten eines Vierecks miteinander, wie Ihnen Abbildung 5 exemplarisch darstellt. Mit dem aus dem Schulunterricht bekannten Strahlensatz können

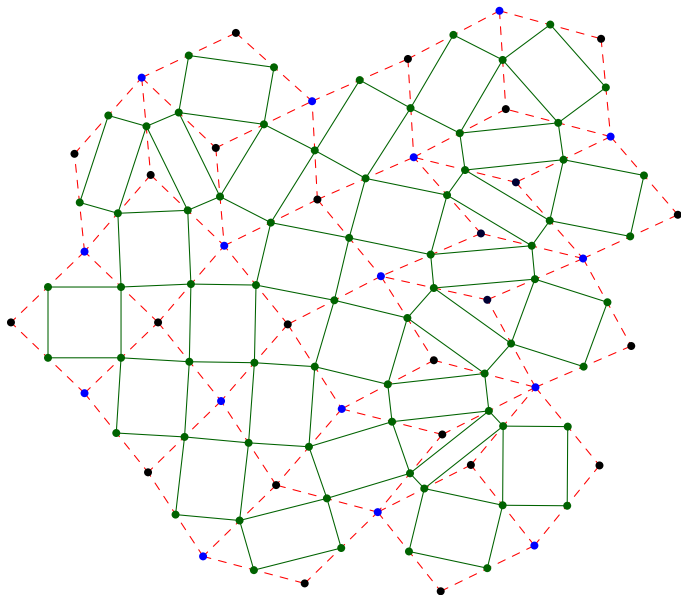


Abbildung 5: Zusätzliche Unterteilung (grün) zur Ausgangszerlegung (rot).

wir zeigen, dass diese neu hinzugefügten Verbindungslinien in jedem Viereck der Ausgangszerlegung ein Parallelogramm formen. Die vier Innenwinkel und das Verhältnis der Seitenlängen des Parallelogramms entsprechen genau den vier Schnittwinkeln und dem Längenverhältnis der Diagonalen des ursprünglichen Vierecks. Unter einer diskreten winkeltreuen Abbildung bleiben diese Größen erhalten, folglich ändern sich auch die Proportionen des Parallelogramms nicht. Dieselbe Eigenschaft kennen wir bereits von klassischen winkeltreuen Abbildungen. Dies illustriert, wieso das Betrachten dieser auf den ersten Blick komplizierteren Zerlegung letztlich zu einer Vereinfachung der Theorie führt.

Mithilfe der soeben beschriebenen Struktur konnten wir erstmals die wesentlichen Objekte der Lehre winkeltreuer Abbildungen im Prinzip genauso beschreiben, wie Mathematikerinnen es aus der klassischen Lehre des 19. Jahrhunderts bereits kennen. Definitionen, Sätze und ihre Beweise im Diskreten entsprechen nahezu eins zu eins ihren klassischen Pendanten. Der besondere Nutzen unserer Arbeiten [1, 2] liegt somit darin, dass sie sich Mathematikstudentinnen als leicht verständliche Einführung in die diskrete Theorie und Wissenschaftlerinnen in angrenzenden Fachrichtungen als Werkzeugkasten anbieten.

4 Bezüge zur statistischen Physik . . .

Unter anderem für seine Arbeiten zum *Ising-Modell* [5] erhielt Stanislav Smirnov die Fields-Medaille, eine der höchsten Auszeichnungen in der Mathematik. Das Ising-Modell ist das Standardmodell zur Beschreibung von Magnetismus und wurde von ihm auf solide mathematische Grundlagen gestellt. Im Zuge dessen erarbeitete er auf diskreten winkeltreuen Abbildungen basierende Methoden [4], die ihre Schlagkraft auch in der Untersuchung anderer Modelle der statistischen Physik zeigen. In der Arbeit [1] entwickelten wir einige dieser Resultate weiter und verallgemeinerten sie, sodass sie auf Zerlegungen in beliebige Vierecke anwendbar sind. Zusammen mit unseren anderen Ergebnissen verspreche ich mir davon neue Erkenntnisse und ein besseres Verständnis der in der theoretischen Physik untersuchten Modelle.

Ein Beispiel eines solchen Satzes ist die in der klassischen Theorie winkeltreuer Abbildungen fundamentale *Cauchysche Integralformel*, die durch Abbildung 6 verbildlicht wird:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - c} dz.$$

Sie gibt an, wie einzig aus den Werten einer winkeltreuen Funktion f auf dem Rand γ eines ebenen Gebietes ihr Verhalten für alle Punkte c im Innern desselben berechnet wird. Das heißt, dass wir allein aus einer äußeren Betrachtung der winkeltreuen Funktion auf all ihre inneren Werte schließen können – ist das nicht Liebe auf den ersten Blick? Im Falle von Zerlegungen in allgemeine

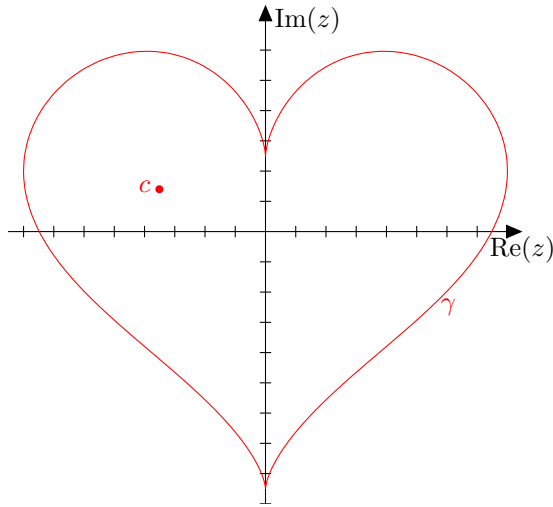


Abbildung 6: Illustration der Cauchyschen Integralformel.

Vierecke konnten wir zum ersten Mal eine diskrete Integralformel aufstellen, die die Werte der Ableitung der winkeltreuen Funktion angibt. Für den Spezialfall des Quadratgitters leiteten wir Formeln für sämtliche Ableitungen her, was im Allgemeinen nicht möglich ist.

5 ... und zur Politik

Tatsächlich ist die diskrete Theorie umso näher an der klassischen, je spezieller die Vierecke der Zerlegung gewählt sind. Allein den Unterteilungen der Ebene in Parallelogramme widmen wir in dem Artikel [1] ein ganzes Kapitel. Andererseits gibt es Aussagen, die sich vereinfachen, wenn die Diagonalen jedes Vierecks senkrecht zueinander sind. Deswegen verwundert es nicht, dass die diskrete Theorie winkeltreuer Abbildungen zunächst für Zerlegungen in Rauten entwickelt wurde. Denn Rauten sind genau die Parallelogramme, deren Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Dies ist auch bei der wohlbekannten Handhaltung von Angela Merkel der Fall. Allerdings sind ihre Daumen gar nicht so lang wie ihre Zeigefinger, sodass es sich bei ihrer Geste streng genommen um einen Drachen handelt. Drachenvierecke wiederum bilden die Grundlage einer anderen Diskretisierung von winkeltreuen Abbildungen, nämlich einer, die auf speziellen Kreispackungen basiert.

Trotz der jüngsten Erkenntnisse sind diskrete winkeltreue Abbildungen für uns alle Neuland. Wie ein Seefahrer in der frühen Neuzeit hoffe ich, auf meiner

Reise durch dieses Land weiterhin unbekannte Gebiete zu entdecken und zu ergründen. Anstatt einer Karte wird mir dabei die klassische Lehre winkeltreuer Abbildungen den Weg weisen.

Kommentar der Editorinnen:

Um die verschiedenen Kartenprojektionen geht es auch im Exponat „Karten der Erde“, das Daniel Ramos für die Open-Source-Ausstellung „Mathematik des Planeten Erde“ entwickelt hat. Von der Seite <https://imaginary.org/de/program/karten-der-erde> können Sie Poster sechs verschiedener Kartenprojektionen herunterladen, darunter sind auch die Mercator-Projektion, die gnomonische Projektion und die Gall-Peters-Projektion. Außerdem ist dort ein Computerprogramm erhältlich, mit dem Sie die unterschiedlichen Verzerrungen für die sechs Projektionen mit Hilfe der Tissotschen Indikatrix (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Tissotsche_Indikatrix) interaktiv vergleichen können.

Bildquellen

Abb. 1 Urheber: Lars H. Rohwedder. Lizenziert unter der Creative-Commons-Lizenz “Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 nicht portiert” über Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Normal_Mercator_map_85deg.jpg und https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gnomonic_Projection_Polar.jpg, besucht am 21. März 2017. Die roten Verbindungslinien wurden vom Autor dieses Schnappschusses hinzugefügt.

Abb. 2 Bild aus dem Film *conform!* von Alexander I. Bobenko und Charles G. Gunn.

Abb. 3 Urheber: Peter Schröder. Veröffentlicht in: B. Springborn, P. Schröder und U. Pinkall, *Conformal equivalence of triangle meshes*, ACM Transactions on Graphics **27** (2008), Nr. 3, 77:1-77:11.

Abb. 4, 5 und 6 Diese Abbildungen wurden vom Autor erstellt.

Literatur

- [1] A. I. Bobenko und F. Günther, *Discrete complex analysis on planar quad-graphs*, Advances in Discrete Differential Geometry (A. I. Bobenko, Hrsg.), Springer-Verlag, 2016, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-50447-5_2, S. 57–132.
- [2] ———, *Discrete Riemann surfaces based on quadrilateral cellular decompositions*, Advances in Mathematics **311** (2017), 885–932, arXiv:1511.00652.
- [3] A. I. Bobenko und B. Springborn, *Diskretisierung in Geometrie und Dynamik – Elastische Stäbe und Rauchringe*, Mitteilungen der DMV **21** (2013), Nr. 4, 218–224, <https://doi.org/10.1515/dmvm-2013-0085>.
- [4] D. Chelkak und S. Smirnov, *Discrete complex analysis on isoradial graphs*, Advances in Mathematics **228** (2011), 1590–1630, arXiv:0810.2188.
- [5] ———, *Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables*, Inventiones mathematicae **189** (2012), Nr. 3, 515–580, arXiv:0910.2045.
- [6] R. J. Duffin, *Potential theory on a rhombic lattice*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **5** (1968), 258–272.

- [7] R. Ph. Isaacs, *A finite difference function theory*, Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Revista. Serie A. Matemática y Física Teórica. **2** (1941), 177–201.
- [8] R. Kenyon, *The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs*, *Inventiones mathematicae* **150** (2002), 409–439, arXiv:math-ph/0202018.
- [9] C. Mercat, *Discrete Riemann surfaces and the Ising model*, *Communications in Mathematical Physics* **218** (2001), Nr. 1, 177–216, arXiv:0909.3600.
- [10] ———, *Discrete complex structure on surfel surfaces*, *Proceedings of the 14th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'08*, Springer-Verlag, 2008, arXiv:0802.1617, S. 153–164.
- [11] K. Stephenson, *Introduction to circle packing: The theory of discrete analytic functions*, Cambridge University Press, 2005.
- [12] S. Weißmann und U. Pinkall, *Filament-based smoke with vortex shedding and variational reconnection*, *ACM Transactions on Graphics* **29** (2010), Nr. 4, 115:1–115:12, <http://page.math.tu-berlin.de/~pinkall/forDownload/filaments.pdf>.

Felix Günther *ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Sonderforschungsbereich Transregio 109 "Discretization in Geometry and Dynamics" an der Technischen Universität Berlin und ist im Jahr 2017 dank des Förderprogramms "Postdoctoral Researchers International Mobility Experience" des Deutschen Akademischen Austauschdienstes an der Université de Genève tätig.*

Mathematische Gebiete
Analysis, Diskrete Mathematik und Grundlagen, Geometrie und Topologie

Verbindungen zu anderen Gebieten
Informatik, Physik

Lizenz
Creative Commons BY-SA 4.0

DOI
10.14760/SNAP-2017-001-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach bieten spannende Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung. Sie werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Die Schnappschüsse haben zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der interessierten Öffentlichkeit weltweit zu fördern. Alle Schnappschüsse werden in Kooperation mit der IMAGINARY Onlineplattform veröffentlicht und können unter www.imaginary.org/snapshots sowie www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

Editorinnen
Anja Randecker und Sophia Jahns
junior-editors@mfo.de

Chefeditorin
Carla Cederbaum
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



IMAGINARY
open mathematics