Instantanés de recherche mathématique d'Oberwolfach

№ 8/2020

Fibrés de Higgs sans géométrie

Steven Rayan [1] • Laura P. Schaposnik [2]

Les fibrés de Higgs sont apparus il y a quelques décennies comme solutions de certaines équations en physique, et ils ont attiré beaucoup d'attention en géométrie comme dans d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Ici, nous donnons un aperçu très informel de quelques aspects d'algèbre linéaire qui anticipent la structure profonde de l'espace de modules des fibrés de Higgs.

1 Introduction

Les fibrés de Higgs font des vagues dans le domaine des mathématiques depuis plus de 30 ans maintenant. Ce sont des solutions de certaines équations différentielles qui viennent de la physique mathématique : en particulier des équations de Yang-Mills (réduites de deux dimensions) [1] ; mais ils sont aussi devenus essentiels en géométrie (algébrique, différentielle, et symplectique), en théorie de la représentation, et même en théorie des nombres. De manière spectaculaire, les fibrés de Higgs ont été utilisés pour prouver le Lemme Fondamental,

[1] Steven Rayan bénéficie du support du *Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada Discovery Grant program* et du *Canadian Tri-Agency New Frontiers in Research Fund (Exploration Stream).*

[2] Laura P. Schaposnik bénéficie du support de la *National Science Foundation* au travers des subventions DMS-1509693 et CAREER Award DMS-1749013, ainsi que de la fondation Alexander von Humboldt. Ce contenu est également basé sur des travaux qui ont bénéficié du support de la *National Science Foundation* sous la subvention DMS-1440140 pendant la résidence de l'auteure au *Mathematical Sciences Research Institute* à Berkeley, Californie, durant le semestre d'automne 2019.

un résultat récompensé par une médaille Fields [4]. Pour boucler la boucle, les fibrés de Higgs sont de nouveau importants en physique des hautes énergies, au travers d'applications à la théorie des cordes et à la symétrie miroir.

2 Espaces de modules modernes et anciens

Nous ne définirons les fibrés de Higgs que dans la prochaine section, car à lui tout seul, un fibré de Higgs n'est pas si important. Ce qui les rend spéciaux, c'est la confluence des attributs géométriques d'une famille entière de fibrés de Higgs : c'est ce qu'on appelle un *espace de modules*. Prenons un instant pour dire quelques mots à propos des espaces de modules avant d'aborder les fibrés de Higgs à proprement parler.

Un espace de modules peut être comparé à un annuaire téléphonique, dans lequel on peut rechercher tous les fibrés de Higgs (ou un quelconque autre type d'objet mathématique). En poursuivant l'analogie du téléphone, il faut dire que, en particulier à notre époque, une personne aura sans doute plusieurs téléphones : par exemple, un téléphone fixe à la maison, un téléphone portable, ainsi qu'un autre téléphone au travail. Pour former l'espace de modules des numéros de téléphone il faut donc considérer le numéro fixe du domicile, le numéro de portable, et le numéro professionnel de la personne comme trois avatars interchangeables pour la même chose : la personne que l'on voudrait joindre. C'est pour cela que nous décidons que pour chaque personne dans l'annuaire, l'espace de modules ne liste qu'un seul de ces trois numéros.[3] C'est ce que l'on appelle une *relation d'équivalence* sur un ensemble, dans le cas présent l'ensemble de tous les numéros de téléphone : deux numéros sont considérés comme équivalents s'ils appartiennent à la même personne. Notre espace de modules de fibrés de Higgs fonctionne de la même façon. Un fibré de Higgs peut avoir plusieurs avatars, et on peut former l'espace de modules en sélectionnant un avatar préféré pour chaque fibré.

Si l'exemple du téléphone n'est pas suffisamment parlant, on peut en prendre un autre : l'ensemble des différentes heures de la journée est un ancien espace de modules qui se trouve être très pratique. Il serait incommode de compter les heures en les accumulant depuis le début de l'histoire connue : au lieu de cela, nous redémarrons l'horloge toutes les 12 ou 24 heures. Si on choisit la première option, nous traitons donc 1, 13, 25, et ainsi de suite comme différents avatars de la même heure. Nous gardons seulement 1 heure du matin et nous nous débarrassons du reste de ses avatars, ce qui explique pourquoi nous ne disons jamais

[3] L'aspect pratique peut-être discutable ici. D'un côté le livre est efficient au niveau des données, car il n'y a qu'une information par personne. Mais d'un autre côté, il ne donne qu'un seul moyen de contacter la personne.

qu'il est 37 heures ou 49 heures. Les mathématiciens utilisent la notation $\mathbb{Z}_{12}$ pour indiquer l'espace de modules des heures du matin ou de l'après-midi.

3 Fibrés vectoriels et matrices de polynômes

Alors finalement, qu'est-ce qu'un fibré de Higgs ? Pour les lecteurs et lectrices qui n'ont pas d'expérience en géométrie complexe avancée (surfaces de Riemann, fibrés vectoriels, Jacobiens, différentielles holomorphes), il est difficile de dire quelque chose de manière vraiment exacte. En acceptant un peu d'imprécision, un *fibré vectoriel* peut être imaginé comme une surface sur laquelle il y a en chaque point des espaces linéaires ou vectoriels.

Dans la nature on peut trouver un animal qui ressemble beaucoup à un fibré vectoriel : le hérisson ! En effet, en chaque « point » de la peau du hérisson, on peut trouver un piquant qu'on peut représenter par un espace à une dimension. On pourrait donc dire que le hérisson est un *fibré linéaire* (réel), comme montré sur la figure 1. Si on remplace chaque piquant par un morceau de carton, on a alors un fibré vectoriel de rang 2. Si maintenant on remplace chaque bout de carton par une boite, on obtient alors un fibré vectoriel de rang 3 ; et ainsi de suite. On parle alors de la peau du hérisson comme de l'*espace de base* de ces fibrés.

FIGURE 1 – Un fibré linéaire sur un hérisson, formé par ses fines épines.

Une propriété cruciale des fibrés vectoriels est la *non-trivialité* : un fibré ne se comporte pas de la même façon sur les différentes petites parcelles de l'espace de base (que l'on nomme des *ouverts*), ce qui est utile pour de nombreuses applications et en particulier en physique. Un bon espace de base aura des ouverts qui sont chacun en correspondance avec $\mathbb{R}^n$, pour un certain n. Plutôt que d'essayer de travailler avec des fibrés non-triviaux (ou même de les définir proprement), nous allons simplement travailler avec un unique ouvert $U = \mathbb{R}^n$.

Une observation que l'on peut souvent faire en mathématiques est la suivante : tout devient plus simple lorsqu'on travaille en utilisant les nombres complexes. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est en correspondance avec l'ensemble des points dans le plan $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Nous allons donc choisir un ouvert de base $U = \mathbb{R}^2$ et nous le considérerons comme $U = \mathbb{C}$. De tels ouverts couvrent une classe spécifique d'espaces de base appelés *surfaces de Riemann*, et ils forment le cadre classique de la théorie des fibrés de Higgs.

Un fibré de Higgs est un fibré vectoriel qui est également équipé d'une application Φ, appelée *champ de Higgs*, qui transforme le fibré vectoriel d'une certaine manière. Elle est parfois aussi appelée « torsion » (voir figure 2).

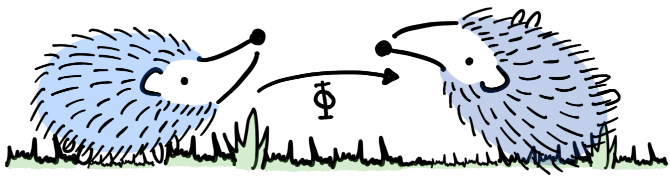

FIGURE 2 – Une application Φ qui renverse le fibré-hérisson.

Comme nous avons choisi de travailler sur un unique ouvert d'une surface de Riemann, l'application Φ peut être représentée d'une manière particulièrement simple. Si nous avons un fibré complexe de rang r sur $U = \mathbb{C}$ (ce qui veut dire qu'on a une copie de $\mathbb{C}^r = \mathbb{R}^{2r}$ en chaque point de U), alors Φ est une matrice $r \times r$ de polynômes. En d'autres termes, les éléments de Φ sont des fonctions polynomiales d'un certain degré k qui prennent la forme

$$a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0,$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$ pour tout i. Le paramètre z est un nombre complexe qui nous indique où nous sommes sur la base U. Lorsque nous choisissons une valeur particulière pour z, l'application Φ devient une matrice ordinaire composée de nombres complexes, et elle agit sur la copie de $\mathbb{C}^r$ en $z \in U$ par multiplication matricielle. Le degré des polynômes peut ici être vu comme l'effet de « torsion ».

Vu que z encode U et que la taille de la matrice Φ nous rappelle que le fibré est composé de copies de $\mathbb{C}^r$, on peut se permettre d'oublier l'ouvert et les $\mathbb{C}^r$, et se concentrer uniquement sur l'application Φ. C'est un point de vue extrêmement réductionniste, mais il nous est utile que les matrices de polynômes montrent un bon nombre des caractéristiques intéressantes que possèdent les vrais fibrés de Higgs, car celles-ci nécessitent seulement l'utilisation d'algèbre linéaire (ce qui nous évite les nombreuses complications géométriques).

4 Espaces de modules de matrices polynomiales et courbes spectrales

Pour commencer, prenons l'exemple le plus simple : les matrices polynomiales dont les éléments sont simplement des nombres complexes. Ce sont si on veut des matrices polynomiales de degré zéro. Nous cherchons maintenant l'espace de modules des matrices complexes 2×2. Nous devons d'abord définir ce qu'est l'équivalence entre deux matrices. De manière naturelle, deux matrices A et B sont équivalentes si elles sont *similaires*, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que

$$B = P^{-1} A P.$$

Prennons par exemple les matrices 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $B = P^{-1}AP$ et donc que A et B sont équivalentes. En fait, écrire les nombres complexes $a + b\,i$ comme des matrices réelles 2×2 de la forme de A, la transformation P correspond à la conjugaison complexe $a + b\,i \mapsto a - b\,i$.

Il se trouve que toute matrice 2×2 de la forme de A est équivalente à une matrice d'une des trois formes suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Les nombres λ_1 et λ_2 sont simplement les valeurs propres de A. Le fait que nous pouvons transformer A en une représentation équivalente dans laquelle ces nombres apparaissent comme les seules données non-triviales suggère que ces valeurs jouent un rôle dans la structure de l'espace de modules des matrices. Pour retourner à l'analogie de l'annuaire, il est donc établi que nous pouvons retrouver une classe d'équivalence de matrices 2×2 similaires grâce à ses valeurs propres.

Quand $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la paire (λ_1, λ_2) correspond à une unique classe de matrices, celle représentée par D dans l'équation (1). Il se passe quelque chose d'un peu différent quand on a une paire de la forme (λ_1, λ_1). Dans ce cas, il y a exactement deux classes qui partagent ce « numéro de téléphone » : la classe des matrices similaires à D_0 et la classe des matrices similaires à D_1 dans l'équation (1). Si vous trouvez cela étrange que la plupart des paires de valeurs propres correspondent à une seule classe de matrices, alors que certaines paires correspondent à deux classes différentes, eh bien vous n'êtes pas les seuls ! C'est le problème fondamental en théorie des modules, et les géomètres algébriques règlent le problème en se débarassant des points supplémentaires qui posent problème. Pour faire cela, on choisit d'enlever les classes représentées par D_1 dans l'équation (1). Cet acte de « jeter » est ce que les géomètres algébriques appellent *imposer une condition de stabilité*. Pour parler en termes d'algèbre linéaire, on enlève les matrices non-diagonalisables de l'ensemble de toutes les matrices 2×2.

Partant de cela, il est tentant de conclure que l'espace $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire l'espace des paires (λ_1, λ_2), est l'espace de modules des matrices 2×2 qui sont diagonalisables par une matrice de similarité. En effet, pour chaque point $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, que $\lambda_1 = \lambda_2$ ou pas, il y a une unique classe de telles matrices. Une fois arrivé là, il est important de se rendre compte de la subtilité suivante : les matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes par similarité. En d'autres termes, les paires (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1) représentent la même classe. La solution est de ne pas faire de distinction entre deux paires qui ne diffèrent que par leur agencement. Dans le langage de la théorie des groupes, on dirait que l'espace des modules est le quotient de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par S_2, le groupe symétrique sur deux lettres. La beauté de tout ceci est que l'espace constitué de l'ensemble de ces paires, regroupées de cette façon, est à nouveau en bijection avec $\mathbb{C}^2$ comme ensemble,[4] et nous pouvons donc conclure que l'espace de modules est effectivement $\mathbb{C}^2$. Vu de la théorie des fibrés de Higgs, l'espace $\mathbb{C}^2$ joue le role de ce qu'on appelle la *base de Hitchin*, tandis que l'unique classe de matrices correspondant à chaque point de $\mathbb{C}^2$ est la *fibre de Hitchin*.

Pour aller plus loin, il est important de noter que les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 dans l'exemple précédent sont les solutions d'une équation polynomiale de degré 2,

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + (\det A) = 0,$$

l'*équation caractéristique* de A, avec tr et det respectivement les opérateurs trace et déterminant.[5] Quand Φ est une matrice polynomiale 2×2 de degré supérieur à zéro, $\operatorname{tr} \Phi$ et $\det \Phi$ sont tous deux des polynômes en z. Cela veut dire qu'en chaque point z de l'ouvert U, il y a une paire de valeurs propres $(\lambda_1(z), \lambda_2(z))$.

[4] On peut aller plus loin, ils sont *homéomorphiques* en tant qu'espaces topologiques. Ce qui est perdu après l'opération de quotient est la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}^2$, les géomètres algébriques préfèrent donc appeler l'espace de modules espace affine $\mathbb{A}^2$.

[5] Pour chaque équation caractéristique, il y a exactement une paire (désordonnée) de valeurs propres qui résolvent l'équation, et donc exactement une classe de matrices 2×2 diagonalisables. C'est une autre manière de voir que l'espace de modules des matrices 2×2 est $\mathbb{C}^2$, car il nous faut deux nombres, $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$, pour écrire chaque équation caractéristique. Dans ce modèle, l'ordre des deux nombres est important : échanger la trace et le déterminant modifierait l'équation et donc les solutions !

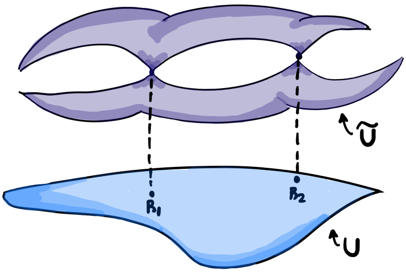

FIGURE 3 – Une courbe spectrale avec R_1 et R_2 correspondant à deux points de ramification.

Cela forme un nouvel ouvert $\widetilde{U}$ qui contient deux points qui projettent vers z pour presque tout $z \in U$. C'est ce que les géomètres appellent un *revêtement double ramifié*. Le mot « ramifié » indique la possibilité qu'il y ait pour certains z des valeurs propres identiques là où les deux feuilles de $\widetilde{U}$ se touchent, comme montré dans la figure 3. Ce nouvel ouvert $\widetilde{U}$ est un modèle local pour ce que les géomètres appellent une *courbe spectrale*, un espace dont les points sont les valeurs propres de certaines matrices ou familles de matrices.

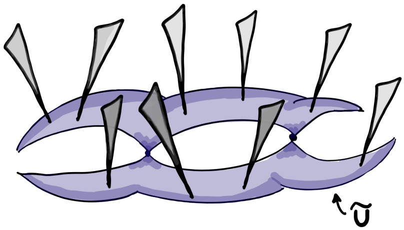

FIGURE 4 – Les données définissant le fibré vectoriel d'un fibré de Higgs, vu comme un fibré linéaire sur le revêtement double de l'espace de base.

Si on donne à $\widetilde{U}$ la structure d'un fibré linéaire complexe, comme illustré en figure 4, alors pour la plupart des points $z \in U$ on aura deux lignes complexes situées directement au-dessus d'eux dans $\widetilde{U}$. On peut descendre ces lignes jusqu'à z (cette opération est appelée *poussé-en-avant*) où elles vont former une copie de $\mathbb{C}^2$. De plus, on peut y lire les deux valeurs propres $\lambda_1(z)$ et $\lambda_2(z)$ au-dessus de z, et à partir d'elles construire une matrice diagonale Φ_z. Il est possible de formuler Φ_z de manière cohérente même en des points z où $\widetilde{U}$ est ramifiée. Après avoir fait ça pour tout $z \in U$, on obtient un fibré vectoriel complexe de rang 2, ainsi que la matrice polynomiale Φ correspondante sur U. Il est possible d'aller et de

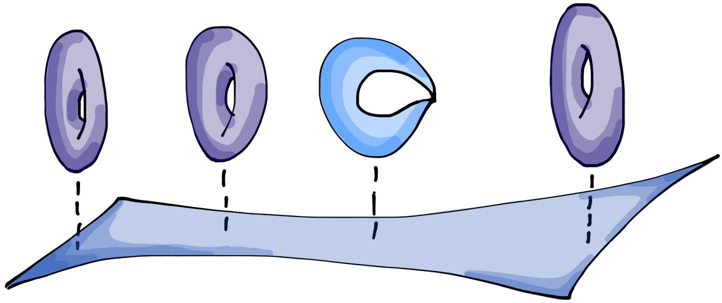

FIGURE 5 – Une fibration en tore avec des fibres singulières.

revenir entre ces deux types d'objets : les matrices polynomiales sur U et les fibrés linéaires complexes sur $\widetilde{U}$. On appelle cela la *correspondance spectrale*, et elle s'étend même aux fibrés de Higgs non-triviaux sur des surfaces de Riemann compactes. Une explication détaillée de tout ceci est donnée dans les travaux de Hitchin [2].

5 Un aperçu du cadre général

Dans l'approche purement géométrique sur une surface de Riemann X, chaque fibré de Higgs sur X va déterminer une courbe spectrale $\widetilde{X}$ qui forme un revêtement ramifié de X. La correspondance spectrale remplace les fibrés de Higgs sur X par des fibrés linéaires sur la $\widetilde{X}$ correspondante, et la correspondance respecte l'équivalence, qui est une généralisation de la similarité des matrices. Si deux fibrés de Higgs sont équivalents, alors ils définissent la même $\widetilde{X}$ et leurs fibrés linéaires sur $\widetilde{X}$ sont aussi équivalents. L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés de Higgs qui ont la même courbe spectrale $\widetilde{X}$ est en correspondance avec l'ensemble des fibrés linéaires[6] sur $\widetilde{X}$, et cela forme un tore géométrique (d'une certaine dimension). L'ensemble de toutes les courbes spectrales forme la base de Hitchin, et les tores correspondants sont les fibres de Hitchin, voir figure 5. Comme avec les matrices ordinaires, nous devons décider si nous nous débarrassons des fibrés de Higgs « instables » pour pouvoir construire un espace de modules. Dans le cas des matrices ordinaires, on échange les courbes spectrales pour les valeurs propres et les fibrés linéaires pour les espaces propres, lesquels sont fixés à équivalence près. Cela permet de retrouver le cadre discuté

[6] Arrivés là, on devrait parler des *fibrés de Higgs holomorphiques* et des *fibrés linéaires holomorphiques* ; mais nous souhaitons garder la discussion à un niveau suffisamment informel pour les lecteurs et lectrices amateurs.

plus tôt, dans lequel la base de Hitchin est formée par les valeurs propres et les fibres de Hitchin sont simplement des points.

Les fibrations en tores, qui sont des structures géométriques constituées d'un tore au-dessus de chaque point d'un autre espace, apparaissent fréquemment en mathématiques et en physique : dans la théorie des systèmes intégrables, en symétrie miroir, et en théorie de la représentation. Cette universalité pose naturellement la question de la façon dont l'espace de modules des fibrés de Higgs pourrait être en connexion avec ces domaines là. Il se trouve que les fibrés de Higgs jouent effectivement un rôle important dans des problèmes au centre de ces trois sujets.

Si nous avons réussi à garder l'attention du lecteur ou de la lectrice, nous l'invitons à prendre un peu de temps pour lire des études introductives aux fibrés de Higgs comme par exemple [3, 5, 6], et à partir de là, d'examiner la littérature qui plonge plus en détails dans l'interaction fertile entre les fibrés de Higgs et différents domaines des mathématiques et de la physique.

Crédits images

Toutes les figures ont été réalisées par les auteurs.

Références

[1] N. J. Hitchin. *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proceedings of the London Mathematical Society (3) 55 (1987), no. 1, 59–126.

[2] N. J. Hitchin. *Stable bundles and integrable systems.* Duke Mathematics Journal 54 (1987), no. 1, 91–114.

[3] N. J. Hitchin. *Riemann surfaces and integrable systems.* Notes by Justin Sawon. *Oxford Graduate Texts in Mathematics 4*, *Integrable systems : twistors, loop groups, and Riemann surfaces*, 11–52, Oxford University Press, 1999.

[4] B. C. Ngô. *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie.* Publications Mathémathiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (2010), no. 111, 1–169.

[5] S. Rayan, *Aspects of the topology and combinatorics of Higgs bundle moduli spaces*, SIGMA 14 (2018), 129, 18 pages.

[6] L. P. Schaposnik, *Higgs bundles – recent applications*, Notices of the American Mathematical Society 67, no. 5 (May 2020).

Steven Rayan *est professeur de mathématiques pures à l'université de Saskatchewan.*

Laura P. Schaposnik *est professeure de mathématiques pures à l'université d'Illinois à Chicago.*

Traduit de l'anglais par
Jan Kohlrus

Sujets mathématiques
Géométrie et topologie

Liens avec d'autres domaines
Physique

DOI
10.14760/SNAP-2020-008-FR

Les *Instantanés de recherche mathématique d'Oberwolfach* donnent un aperçu passionant de la recherche mathématique d'aujourd'hui. Ils ont été rédigés par des participants aux conférences de l'institut de recherche mathématique d'Oberwolfach (MFO). Ce projet d'instantanés est conçu pour promouvoir la compréhension et l'appréciation des mathématiques modernes et de la recherche en mathématique, et s'adresse au public intéressé du monde entier. Tous les instantanés sont publiés en collaboration avec la plateforme IMAGINARY et sont disponibles sur www.imaginary.org/fr/snapshots et sur www.mfo.de/snapshots.

ISSN 2626-1995

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9 – 11
77709 Oberwolfach
Allemagne

Directeur
Gerhard Huisken

Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach

Member of Leibniz
Leibniz Association

IMAGINARY
open mathematics