Schnappschüsse moderner Mathematik
aus Oberwolfach

№ 2/2014

Matrixfaktorisierungen

Wolfgang Lerche

Im Folgenden soll ein kurzer Abriss des Themas Matrixfaktorisierungen gegeben werden. Wir werden darlegen, warum dieses recht simple Konzept zu erstaunlich tiefen mathematischen Gedankengängen führt und auch in der modernen theoretischen Physik wichtige Anwendungen hat.

1 Einleitung

Das Grundproblem ist einfach zu formulieren: Man betrachtet ein Polynom $W(x)$ mit n (komplexen) Variablen $(x_1, \ldots, x_n) = x$, zum Beispiel $W(x) = x_1x_2 - {x_3}^k$ (wobei k eine natürliche Zahl ≥ 2 ist). Dieses Polynom kann auch noch von weiteren, konstanten Parametern $(t_1, \ldots, t_m) = t$ abhängen; in diesem Fall schreiben wir $W(x,t)$. Im Allgemeinen kann ein solches Polynom nicht *über* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *faktorisiert* werden, d. h. es kann nicht als Produkt von Polynomen mit komplexen Koeffizienten geschrieben werden.[1]

Sogenannte *Matrixfaktorisierungen* sind aber für jedes Polynom möglich. Eine Matrixfaktorisierung eines Polynoms $W(x,t)$ ist gegeben durch $N \times N$–Matrizen[2] $F(x,t)$ und $G(x,t)$, deren Einträge Polynome sind und deren Produkt diejenige $N \times N$–Matrix ergibt, auf deren Diagonale genau das Polynom

[1] Natürlich ist z. B. die Produktdarstellung $W(x) = 1 \cdot W(x)$ immer möglich, aber solche „trivialen" Möglichkeiten ignoriert man.

[2] Eine $N \times N$*–Matrix* ist eine quadratische Anordnung von Elementen in N Zeilen und N Spalten. Diese Elemente, die *Einträge* der Matrix, können z. B. Zahlen sein oder, wie in unserem Fall, Polynome. Man kann zwei 2×2–Matrizen nach dem Muster $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} =$

$W(x,t)$ steht und die ansonsten nur Nullen enthält. Das heißt: Gesucht sind $N \times N$–Matrizen $F(x,t)$ und $G(x,t)$ mit $F(x,t) \cdot G(x,t) = G(x,t) \cdot F(x,t) = W(x,t)\, \mathbf{1}_{N\times N}$. Äquivalent kann man dies so schreiben:

$$Q^2(x,t) = W(x,t)\, \mathbf{1}_{2N\times 2N} \ , \qquad Q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & G(x,t) \\ F(x,t) & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Dimension N ist *a priori* beliebig.

Für ein Polynom $W(x,t)$ kann es auch mehrere Matrixfaktorisierungen geben: In unserem Beispiel $W(x) = x_1 x_2 - {x_3}^k$ gibt es folgende Matrixfaktorisierungen mit $N = 2$:

$$F_A \ = \begin{pmatrix} x_1 & {x_3}^A \\ {x_3}^{k-A} & x_2 \end{pmatrix} \ , \qquad G_A \ = \begin{pmatrix} x_2 & -{x_3}^A \\ -{x_3}^{k-A} & x_1 \end{pmatrix} \ , \qquad A = 1, \ldots, k-1.$$

Dies sind im Wesentlichen alle nicht-trivialen Matrixfaktorisierungen von $W(x) = x_1 x_2 - {x_3}^k$.

Man kann F_A bzw. G_A als Abbildung von einem Raum M^0 in einen Raum M^1 bzw. von M^1 nach M^0 auffassen und somit Q als Abbildung von $M = M^0 \oplus M^1$ auf sich selbst verstehen.

2 Kategorisierung

Dem Problem der Matrixfaktorisierung eines Polynoms W liegt nun eine so grundsätzliche wie abstrakte Struktur zugrunde. Nämlich die einer *Kategorie*, welche man grob als Ansammlung bestimmter *Objekte* $\mathcal{O}_A$ zusammen mit einer Ansammlung von sogenannten *Morphismen* $\Psi_{AB} : \mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_A$ zwischen diesen Objekten verstehen kann. Man kann sich einen Morphismus als Pfeil von einem Objekt zu einem anderen vorstellen. Sehr oft sind die Morphismen einfach nur Abbildungen. [3] Zu einem gegebenen Polynom W kann man nun folgendermaßen eine Kategorie $Cat(MF_W)$ konstruieren: Die Objekte $\mathcal{O}_A$ von $Cat(MF_W)$ sind die verschiedenen Matrixfaktorisierungen, die zu W gehören, d. h. sie sind von der Form

$$\mathcal{O}_A \ = \left(M^0 \xrightarrow{F_A} M^1 \xrightarrow{G_A} M^0 \right) \ , \quad F_A \cdot G_A = G_A \cdot F_A = W \ .$$

$\begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_3 & a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_4 \\ a_3 \cdot b_1 + a_4 \cdot b_3 & a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_4 \end{pmatrix}$ miteinander multiplizieren; für größere Matrizen geht das analog. Die $N \times N$–Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ kürzt man oft mit $\mathbf{1}_{N\times N}$ ab.

[3] Zum Beispiel bilden die Vektorräume die Objekte einer Kategorie, die zugehörigen Morphismen sind dann lineare Abbildungen.

Derartige Objekte nennt man auch „getwistete Kettenkomplexe“.

Die Morphismen der Kategorie $Cat(MF_W)$ sind bestimmte Matrizen Ψ_{AB}, die zwischen Objekten $\mathcal{O}_A$ und $\mathcal{O}_B$ vermitteln. In dieser Kategorie $Cat(MF_W)$ können nun sogenannte „Differentiale"von Morphismen Ψ_{AB} definiert werden wie z. B.

$$d\,\Psi_{AB} \;=\; Q_A \cdot \Psi_{AB} \pm \Psi_{AB} \cdot Q_B.$$

Nun kommt es darauf an, welche Morphismen Ψ_{AB} Differential Null haben ($d\,\Psi_{AB} = 0$), und ob sie als Bild von anderen unter der Abbildung d erhalten werden können oder nicht (d. h. gibt es einen Morphismus $\tilde{\Psi}$, der $\Psi_{AB} = d\,\tilde{\Psi}_{AB}$ erfüllt?).

Im obigen Beispiel $W(x) = x_1 x_2 - {x_3}^k$ kann man z. B. folgende nicht-triviale Morphismen finden:

$$\Psi_{A+1,A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 & {x_3}^A \\ 0 & 0 & {x_3}^{k-A} & -x_1 \\ x_1 & {x_3}^{A+1} & 0 & 0 \\ {x_3}^{k-A-1} & x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = 1, \ldots, k-1,$$

wobei jedes $\Psi_{A+1,A}$ verschwindendes Differential hat (d. h. $d\,\Psi_{A+1,A} = 0$), selbst aber nicht im Bild von d liegt (d. h. es gibt keinen Morphismus $\tilde{\Psi}$ mit $d\,\tilde{\Psi} = \Psi_{A+1,A}$).

Wir haben nun die Kategorie der Matrixfaktorisierungen $Cat(MF_W)$ im Wesentlichen beschrieben; hierzu kommen diverse weitere Strukturen wie zum Beispiel eine Festlegung, wann zwei Objekte als äquivalent anzusehen sind (z. B. wenn sie sich nur um die triviale Matrixfaktorisierung unterscheiden, bei der $F = 1$ und $G = W$ ist oder umgekehrt).

3 Anwendungen in Mathematik und Physik

Die Kategorie $Cat(MF_W)$ tritt in verschiedenen Zusammenhängen in Mathematik und Physik auf. Eine sehr wichtige Anwendung besteht in der Theorie der Singularitäten und deren Auflösung, einem Teilgebiet der algebraischen Geometrie. Die Menge derjenigen Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{C}^n$, die die Gleichung

$$W(x,t) \;=\; 0$$

erfüllen, bilden eine *Mannigfaltigkeit*[4]. In unserem Anfangsbeispiel etwa bildet die Lösungsmenge der Gleichung

$$x_1 x_2 - {x_3}^k \ = \ 0$$

eine Mannigfaltigkeit mit einer *isolierten Singularität*[5] am Koordinatenursprung (wobei $k \geq 2$ ist). Man kann sich vorstellen, dass eine solche Singularität durch simultanes Schrumpfen mehrerer Zykeln[6] einer anderen, nicht-singulären Mannigfaltigkeit entsteht. Um die Geometrie besser zu verstehen, ist es aber günstiger, statt der kollabierten (singulären) Mannigfaltigkeit eine leicht deformierte, nur fast singuläre Mannigfaltigkeit zu betrachten. Diese erhält man durch die „Auflösung der Singularität", eine iterative Prozedur, bei der einzelne Komponenten der Singularität schrittweise „aufgeblasen", d. h. in wohldefinierter Weise durch kleine nichtsinguläre Sphären ersetzt werden.

Die Kategorie der Matrixfaktorisierungen kann dazu verwendet werden, die Auflösung von Singularitäten zu beschreiben: Man kann die kollabierenden Zykeln mit den Matrixfaktorisierungen assoziieren; die zugehörigen Morphismen beschreiben, wie die Zykeln sich gegenseitig schneiden. Wir sehen, dass die Art und Weise, wie Matrixfaktorisierungen mit einer Singularität assoziiert sind, Information über deren Auflösung enthalten.

Singularitäten von Mannigfaltigkeiten und ihre Auflösung spielen eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik, genauer in der Stringtheorie. Die Stringtheorie hat sich als ein sehr fruchtbares Bindeglied zwischen Mathematik und Physik erwiesen. In der Stringtheorie wird angenommen, dass die zugrundeliegende Struktur aller Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen durch ultrakleine Fädchen oder „Strings" gegeben ist (und andere, höherdimensionale Membranen, kurz „Branen").

Die Elementarteilchen und ihre Eichwechselwirkungen in drei räumlichen und einer zeitlichen Dimension entstehen u. a. durch Strings und Branen, die sich um topologisch nicht-triviale Zykeln einer sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit herumwickeln oder sich zwischen unverbundenen Komponenten spannen. Daher

---

[4] Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein Objekt, das lokal so aussieht wie der flache Raum, global aber völlig anders ausschauen kann. Zum Beispiel ist die Erdoberfläche eine Mannigfaltigkeit. Für einen auf ihr stehenden Beobachter ist sie kaum von einer Ebene zu unterscheiden, global betrachtet aber ist sie anders geformt (nämlich sphärisch).

[5] Eine *isolierte Singularität* einer Mannigfaltigkeit ist ein einzelner Punkt, an dem die Mannigfaltigkeit nicht so schön flach und glatt aussieht – etwa weil sie sich selbst durchdringt oder geknickt ist. Mithilfe des kostenlosen Programms SURFER (downloadbar unter http://imaginary.org/de/program/surfer)kann man aus Polynomen Mannigfaltigkeiten mit und ohne Singularitäten erzeugen. Erklärungen dazu findet man im Begleitheft unter der Adresse http://imaginary.org/de/imaginary-entdeckerbox.

[6] Man kann sich Zykeln als Teile der Mannigfaltigkeit denken, die aus (höherdimensionalen) „verbogenen" Polyedern zusammengesetzt sind.

bestimmen die Geometrie, Topologie und speziell die Singularitäten dieser höherdimensionalen Mannigfaltigkeit die Eigenschaften der Elementarteilchen, also deren Ladungsspektrum, Massen, Kopplungen usw.[7]

Die übliche „Riemannsche Geometrie“ der Raumzeit ist nur eine Näherung, die bei großen Abständen oder niedrigen Energien gültig ist. Bei hohen Energien bzw. kleinen Abständen werden Quanteneffekte wichtig. Die Frage ist daher, welche Art von mathematischer Sprache man überhaupt verwenden kann, um solche „nichtgeometrischen” Phänomene bei kurzen Abständen zu beschreiben. Es stellt sich heraus, dass die Sprache der Kategorien gut geeignet ist, um solche aufgewickelten Branen zu beschreiben. Während die naive Vorstellung von aufgewickelten Branen und Strings nur bei großen Abständen gültig ist, wird deren allgemeine Natur durch algebraische Objekte wie Kettenkomplexe und Abbildungen zwischen ihnen korrekt beschrieben. Obwohl diese Ideen vielleicht recht abstrakt anmuten, kann man sie in handfeste physikalische Berechnungen ummünzen, indem man ausnutzt, dass die Kategorie der Matrixfaktorisierungen äquivalent zu gewissen anderen relevanten Kategorien ist. In dieser Weise kann man die verschiedenen Branen mit denjenigen Matrixfaktorisierungen beschreiben, die zur sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit gehören, und die offenen Strings mit den Morphismen. Dies erlaubt es, mittels expliziter Matrixdarstellungen physikalische Phänomene zu studieren, zum Beispiel das Problem der Bindungszustände von Branen – es gibt nämlich keine absolute Unterscheidung zwischen elementaren und zusammengesetzten Branen. In der Sprache der Kategorien, wo solche Branen als Kettenkomplexe dargestellt werden, ist dem automatisch Rechnung getragen.

Wir sehen hier also anhand von Matrixfaktorisierungen, wie sehr abstrakte mathematische Konzepte in der Physik eine konkrete und nützliche Anwendung finden können.

[7] So führt z. B. eine Singularität der obigen Form direkt zu Eichwechselwirkungen zwischen Elementarteilchen mit Eichgruppe $SU(k)$.

Literatur

[1] P.S. Aspinwall, *D-branes on Calabi-Yau manifolds*, arxiv:hep-th/0403166v1, 2004.

[2] K. Becker, M. Becker und J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[3] R. Blumenhagen, D. Lüst und S. Theisen, *Basic Concepts of String Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2012.

[4] M. R. Douglas, *D-branes, categories and N=1 supersymmetry*, J. Math. Phys. **42** (2001), 2818–2843, http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0011017.

[5] D. Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), Nr. 1, 34–64.

[6] S. Gukov und J. Walcher, *Matrix factorizations and Kauffman homology*, (2005), http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0512298.

[7] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, R. Vakil und E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Amer. Math. Soc., Clay Mathematics Institute, Providence, Cambridge, 2003.

[8] A. Kapustin und D. Orlov, *Lectures on mirror symmetry, derived categories, and D-branes*, arxiv:math/0308173, 2003.

[9] M. Kontsevich, *Homological algebra of Mirror Symmetry*, arxiv:alg-geom/9411018v1, 1994.

[10] C. I. Lazaroiu, *D-brane categories*, Int. J. Mod. Phys. **A18** (2003), 5299–5335, http://www.arxiv.org/abs/hep-th/0305095.

[11] W. Lerche, *Recent Developments in String Theory*, http://lerche.web.cern.ch/lerche/papers/strings.pdf, 1997, [Online; abgerufen am 16.07.2014].

[12] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progress in Math., Bd. 270, Birkhauser, Boston Inc., 2009, S. 503–531.

[13] K. Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Inventiones mathematicae **14** (1971), Nr. 2, 123–142, ISSN 0020-9910, http://dx.doi.org/10.1007/BF01405360.

[14] P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[15] Wikipedia, *Homologische Algebra*, http://de.wikipedia.org/wiki/Homologische_Algebra, 2013, [Online; abgerufen am 16.07.2014].

[16] ———, *Kategorientheorie*, http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorientheorie, 2013, [Online; abgerufen am 16.07.2014].

Wolfgang Lerche *ist Professor für Theoretische Physik an der Universität Heidelberg und Senior Research Physicist am CERN.*

Mathematische Gebiete
Geometrie und Topologie

Verbindungen zu anderen Gebieten
Physik

DOI
10.14760/SNAP-2014-002-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es ist Teil des Mathematikkommunikation-Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung und der Oberwolfach Stiftung gefördert wird. Alle Schnappschüsse können unter www.imaginary.org sowie unter www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

Editorin
Sophia Jahns
junior-editors@mfo.de

Chefeditorin
Carla Cederbaum
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9 – 11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft
Klaus Tschira Stiftung gemeinnützige GmbH
KTS
oberwolfach FOUNDATION
IMAGINARY open mathematics