

Wie steuert man einen Kran?

Robert Altmann • Jan Heiland

Die Steuerung einer Last an einem Kran ist ein technisch und mathematisch schwieriges Problem, da die Bewegung der Last nur indirekt beeinflusst werden kann. Anhand eines Masse-Feder-Systems illustrieren wir diese Schwierigkeiten und zeigen wie man mit einem zum konventionellen Lösungsweg alternativen Optimierungsansatz die auftretenden Komplikationen teilweise umgehen kann.

1 Die Problemstellung

Wir betrachten zwei Wagen, die wie in Abbildung 1 durch eine Feder verbunden sind. Die Aufgabe ist nun, den linken Wagen (Wagen 1) so zu führen, dass sich der rechte Wagen (Wagen 2) in vorgegebener Weise vor und zurück bewegt.

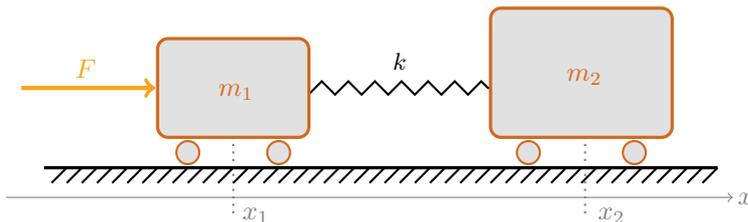


Abbildung 1: Illustration zweier Wagen, die durch eine Feder gekoppelt sind. Gesucht ist die Kraft F , die auf den linken Wagen ausgeübt werden muss, damit der rechte Wagen sich wie gewünscht bewegt.

Dieses Beispiel stellt einen Prototyp für kompliziertere Kran-Modelle da, bei denen man die zu transportierende Last auf bestimmte Weise bewegen möchte. Auch in diesem Fall bewegt man die Last nicht direkt, sondern indirekt über die Position des Krans, die Seillänge und die Aufrollgeschwindigkeit.

1.1 Die Problematik

Was macht das Problem so kompliziert? Ersetzt man die Feder durch eine feste Verbindung, so ist die Steuerung schnell gefunden. Man bewegt den ersten Wagen genau so, wie sich auch der zweite bewegen soll, nur um einen konstanten Abstand verschoben.

Verwenden wir hingegen eine Feder, versetzt jede Bewegung des ersten Wagens den zweiten in Schwingung. Das erschwert die Aufgabe erheblich, da das Ziel nur noch indirekt angesteuert werden kann.

Das Problem ist also die *schwache Kopplung* zwischen den Ausgangsvariablen, der Position der Last oder der Position des zweiten Wagens, und den steuerbaren Variablen. Die schwache Kopplung bedeutet insbesondere, dass man stark agieren muss, um auch nur kleine Effekte am Ausgang zu erreichen.

1.2 Formulierung als Differentialgleichung

Zur mathematischen Analyse des Problems beschreiben wir das System mittels zweier Differentialgleichungen und einer algebraischen Gleichung, die die oben beschriebene Dynamik mathematisch modellieren. Dazu nehmen wir an, dass der rechte Wagen eine Masse von $m_2 = 2$ kg hat und damit doppelt so viel wiegt wie der linke mit $m_1 = 1$ kg. Die Feder hat im entspannten Zustand eine Länge von 0,5 m. Die Bahn $x_2(t)$ des zweiten Wagens – auch *Trajektorie* genannt – soll vorgegeben und durch die Funktionswerte einer Funktion, die wir g nennen wollen, beschrieben werden. Nach der Formel „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“^[1] erhalten wir zwei weitere Gleichungen und beschreiben das Modell nun durch folgendes System von Gleichungen^[2]:

$$\ddot{x}_1(t) = k(x_2(t) - x_1(t) - 0,5) + F(t), \quad (1a)$$

$$2\ddot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - x_1(t) - 0,5), \quad (1b)$$

$$x_2(t) = g(t). \quad (1c)$$

Die Variablen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind zeitabhängig und geben die Position der beiden Wagen an. Die wirkende Federkraft berechnet sich aus der Auslenkung

[1] Dies ist das zweite Newtonsche Axiom, die „Grundgleichung der Mechanik“ und wird oft als Formel durch $F = ma$ angegeben. Die Beschleunigung a eines Körpers ist dabei die zweite Ableitung der zeitabhängigen Variable, welche die Position des Körpers beschreibt.

[2] Maßeinheiten werden hier im mathematischen Modell ausgelassen.

der Feder multipliziert mit der Federkonstante k . Schließlich bezeichnet F die gesuchte Eingangskraft, auch Kontrolle oder Kontrollkraft genannt, die man aufbringen muss, um diese Bedingung zu erfüllen.

Solche Systeme nennt man *differential-algebraische Gleichungen*, da (1a) and (1b) Differentialgleichungen sind, (1c) aber eine algebraische Gleichung ist. Abkürzend verwendet man DAE, was für das englische *Differential algebraic equation* steht. In der numerischen Simulation erweisen sich diese Gleichungen als problematisch, da sie kleine aber unausweichliche Abweichungen – Rundungsfehler in der numerischen (Näherungs-)Rechnung, Messfehler der eingehenden Anfangsbedingungen und Parameter wie etwa der Federstärke k – so massiv verstärken können, dass das Ergebnis unbrauchbar ist. Als Maß für diese zu erwartenden Probleme, gibt es den sogenannten *Index*, siehe zum Beispiel [4]. Je größer der Index eines Gleichungssystems, desto problematischer erweist sich in der Regel die numerische Simulation des Systems.

Eine normale Differentialgleichung, die nicht an eine algebraische Gleichung gekoppelt ist, hat den Index 0. Typische Gleichungen aus der Simulation von Schaltkreisen oder mechanischen Systemen haben einen Index von maximal 3. Das Beispiel oben hat den Index 5. Das ist schon zu groß, als dass mit gängigen Lösungsverfahren noch zuverlässige Approximationen erhalten werden könnten. In diesem hohen Index manifestiert sich die oben beschriebene schwache Kopplung zwischen der (gesuchten) Eingangsvariablen $F(t)$ und der Ausgangsvariablen $x_2(t)$ mathematisch.

Die schwache Kopplung zeigt sich auch in der Lösung der DAE, die man für dieses kleine Beispiel noch direkt hinschreiben kann. Wer möchte kann nachrechnen, dass, geht man vom Stillstand zum Zeitpunkt $t = 0$ und einer gegebenen Wunschtrajektorie $g(t)$ aus, die Lösung zu (1) durch

$$x_2(t) = g(t), \tag{2a}$$

$$x_1(t) = g(t) - 0.5 + \frac{2}{k}\ddot{g}(t) \tag{2b}$$

$$\text{und } F(t) = \frac{2}{k}g^{(4)}(t) + 3\ddot{g}(t) \tag{2c}$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet $g^{(4)}$ die vierte Ableitung von g . Eine erstaunliche Konsequenz aus der speziellen Struktur der DAE ist, dass man die Trajektorie g nicht beliebig vorgeben kann. Dies hängt damit zusammen, dass wir an die Kontrolle F die Bedingung stellen, stetig zu sein, das heißt, anschaulich betrachtet sollte F sich nicht sprunghaft verändern. Will man sich an realen Bedingungen orientieren, ist dies eine sinnvolle Annahme. Ein solches F kann man aber nur dann finden, wenn die Funktion g mindestens viermal stetig differenzierbar ist, wie aus Gleichung (2c) ersichtlich ist.

1.3 Trajektorie mit Sinusschwingung

Um dieses Phänomen zu verdeutlichen, betrachten wir ein konkretes Beispiel. Wollen wir erreichen, dass Wagen 2 mit einer hohen Frequenz aber einer kleinen Amplitude schwingt, so geben wir beispielsweise die Trajektorie

$$g(t) = \frac{1}{10} \sin(\omega t)$$

vor. Die Amplitude ist durch den Faktor $1/10$ gegeben, die Frequenz durch den Parameter ω .

Löst man nun das System (1) so ergibt sich gemäß der allgemeinen Lösung (2c) für die Eingangskraft

$$F(t) = \frac{2}{k} g^{(4)}(t) + 3\ddot{g}(t) = \frac{1}{5k} \omega^4 \sin(\omega t) - \frac{3}{10} \omega^2 \sin(\omega t).$$

Die gewünschte Frequenz geht also in der vierten Potenz in die aufzubringende Kraft ein.

1.4 Auswirkungen auf numerische Verfahren

Das Beispiel macht deutlich, dass kleine Änderungen der Funktion g sehr große Auswirkungen auf F haben können. Man könnte sich zum Beispiel vorstellen, die Frequenz ω von 10 s^{-1} auf 11 s^{-1} zu erhöhen. Das macht einen erheblichen Unterschied in der aufzubringenden Kraftamplitude!

Das gilt ebenso für ungewünschte Abweichungen, die auftreten, wenn man solche Probleme näherungsweise auf dem Computer löst. So werden, beispielsweise, eigentlich kleine Rundungsfehler in so großem Maße verstärkt, dass es zum Ausfall numerischer Lösungsverfahren kommen kann.

Ein solcher Ausfall besteht, wenn der zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung gewählte Algorithmus nicht in der Lage ist, einen geringen Fehler zwischen der berechneten und der eigentlichen Lösung zu garantieren. Manche Algorithmen erkennen solche Situationen und warnen den Anwender. Anderenfalls muss der Anwender dies aus der nachfolgenden Betrachtung der berechneten Werte selbst erkennen. Mögliche Auswege sind, sofern verfügbar, die Wahl einer anderen Methode oder die Umformulierung des Problems.

2 Formulierung als Optimierungsproblem

Im ersten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Bedingung, dass der rechte Wagen *genau* auf der vorgegebenen Zieltrajektorie g liegt, Komplikationen mit sich bringt.

Aus diesem Grund wollen wir diese Bedingung etwas abmildern. Wir nehmen nun an, dass die Krafteinwirkung durch F zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt und bei $t = T$ endet, und betrachten dazu folgendes **Optimierungsproblem**:

Finde ein F mit möglichst kleinen Werten, sodass die Differenz $|x_2(t) - g(t)|$ so klein wie möglich ist,

oder, mathematisch formuliert,

finde die Lösung zu

$$\min_F \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (|x_2(t) - g(t)|^2 + \beta |F(t)|^2) dt + \gamma \frac{1}{2} |x_2(T) - g(T)| \right\}, \quad (3)$$

unter der Bedingung, dass x_1 , x_2 und F die Gleichungen (1b) und (1a) erfüllen. Dabei sind β und γ positive, reelle Zahlen.

Statt unseres DAE-Systems (1) versuchen wir nun also ein anderes Gleichungssystem zu lösen. Wir fordern dabei nicht mehr, dass die Gleichung (1c) erfüllt wird, sondern haben diese durch (3) ersetzt.

Die spezielle Form von (3) lässt sich so erklären: unter allen F wird eines gesucht, sodass die Summe aus dem Integral- und dem zusätzlichen Term möglichst klein wird. Das Integral wird dann klein, wenn die Summanden des Integranden möglichst klein werden, das heißt wenn die Abweichung von der Zieltrajektorie g und die Kraft F gering bleiben. Durch das Integrieren werden große Abweichungen oder ein großer Kraftaufwand über den gesamten Zeitraum von Startpunkt 0 bis zum Endpunkt T „bestraft“. Durch den letzten Term wird der Endpunkt noch einmal besonders gewichtet.^[3] Mit den Parametern β , $\gamma > 0$ kann die Gewichtung der einzelnen Terme gesteuert werden, je größer einer der Parameter, desto kleiner wird erzwungenermaßen der entsprechende Term.

In realen Anwendungen wäre ein kleines F in der Regel auch mit kleinen Kosten verbunden, sodass man hier also einen Kompromiss aus Genauigkeit der Kontrolle und den entstehenden Kosten sucht.

Die Umformulierung als Optimierungsproblem hat einige Vorteile. Erstens den praktischen, dass die zur Ausübung der Kraft notwendige Energie zur Steuerung optimal eingesetzt wird, also möglichst wenig Energie ungenutzt „ver(sch)wendet“ wird. Zweitens den theoretischen, dass die Glattheitsanforderungen an g wegfallen. Im ersten Teil haben wir gesehen, dass man g als mindestens viermal stetig differenzierbar annehmen muss. Um eine Lösung für das Optimierungsproblem (1a), (1c) und (3) zu erhalten, reicht eine stetige Ausgangsfunktion g .

[3] Warum könnte das für das reale Problem ein sinnvoller Ansatz sein?

Allerdings, und das ist entscheidend, muss der Kompromiss in der jeweiligen Anwendung tragbar sein: Steuert man einen Kran, und die Last soll nach durchlaufener Trajektorie an einem bestimmten Punkt stillstehen, so muss die Masse am Ende wirklich in Ruhe sein und nicht nur *so gut wie möglich in Ruhe*.

2.1 Lösungen des Optimierungsproblems

Die Minimierungsaufgabe mit dem „Kostenfunktional“ (3) fällt in die Klasse der Probleme *Optimalsteuerung mit linearen Differentialgleichungen als Nebenbedingungen* [3]. Für diese Probleme gibt es diverse gut funktionierende Lösungsmethoden. Für uns ist wichtig, dass für große Werte von β , das heißt bei einer starken Bestrafung vom Kraftaufwand F , die Kraft nicht mehr beliebig groß werden kann und damit in der Formulierung als Optimierungsproblem die oben beschriebenen Schwierigkeiten der Fehlerverstärkung nicht mehr auftreten.

Das Kostenfunktional (3) ist so konstruiert, dass für immer kleinere Werte von β immer mehr Gewicht auf die Differenz $|x_2(t) - g(t)|$ gelegt wird. In der Tat kann man beweisen, dass, wenn $\beta = 0$ und g genügend oft differenzierbar ist, die Lösung des Optimierungsproblems mit der Lösung des Ausgangsproblems in (1) zusammenfällt.

Interessante Überlegungen ergeben sich für die Situation, dass g nicht genügend oft differenzierbar ist. Dann hat das Optimierungsproblem zwar eine Lösung für beliebig kleine $\beta > 0$, aber der Fall $\beta = 0$ ist nicht lösbar. In unserem Preprint [1] haben wir analytisch untersucht, wie sich die Lösung des Optimalsteuerungsproblems für β nah an der Null verhält, und herausgefunden, dass in diesem Fall die höheren Ableitungen der Kontrollkraft sehr hohe Werte annehmen. Das wiederum bedeutet hohe Amplituden und schnelle Oszillationen in der Kontrollkraft selbst – ein Zustand, den man in der Praxis, zum Beispiel beim Steuern eines Kranes, auf jeden Fall vermeiden möchte.

2.2 Beispiel

Für das in Kapitel 1.1 beschriebene Beispielproblem geben wir ein g vor, das die Bewegung von Wagen 2 aus der Ruhelage in Position $x_2(0) = 0,5$ m in die Ruhelage in Position $x_2(T) = 2,5$ m vorschreibt. Die Zieltrajektorie g ist so oft differenzierbar gewählt, dass wir auch die exakte Kontrollkraft gemäß Gleichung (2c) ausrechnen können.

Wie in Abbildung 2 dargestellt, hat die für die exakte Lösung des Problems aufzuwendende Kraft F extrem hohe Maximalwerte. Im Vergleich dazu sind die Kontrollkräfte, die über das Optimierungsproblem bestimmt werden, selbst für kleine Werte von β moderat. Der dafür eingegangene Kompromiss besteht in den Abweichungen von der exakten Zieltrajektorie, die für große β in Abbildung 3 deutlich hervortreten.

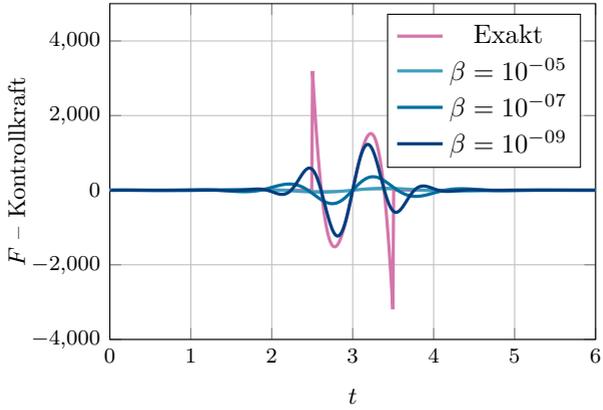


Abbildung 2: Die exakt ausgerechnete Kontrollkraft F und die aus der Optimierung erhaltenen Kräfte für verschiedene Werte von β .

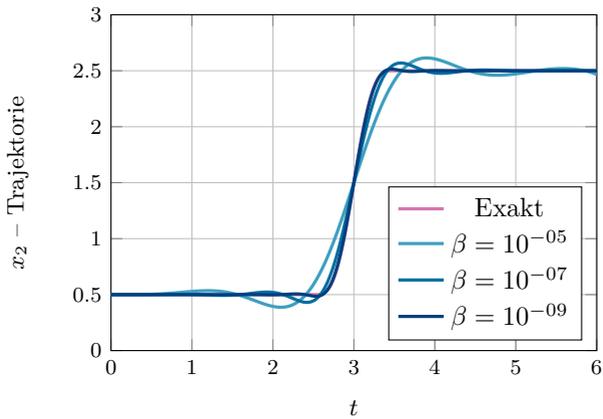


Abbildung 3: Die exakte und die aus den Optimierungen erzielten Trajektorien.

Literatur

- [1] R. Altmann und J. Heiland, *Optimal Control for Problems with Servo Constraints*, Preprint, MFO Preprint OWP 2015-18, Germany, 2015.
- [2] P. Kunkel und V. Mehrmann, *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006, ISBN 3-03719-017-5, <http://dx.doi.org/10.4171/017>. MR 2225970 (2007e:34001)
- [3] A. Locatelli, *Optimal control*, Birkhäuser Verlag, 2001, ISBN 3-7643-6408-4, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-8328-3>.
- [4] V. Mehrmann, *Index concepts for differential-algebraic equations*, Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics (T. Chan, W. J. Cook, E. Hairer, J. Hastad, A. Iserles, H. P. Langtangen, C. Le Bris, P. L. Lions, C. Lubich, A. J. Majda, J. McLaughlin, R. M. Nieminen, J. Oden, P. Souganidis und A. Tveito, Hrsg.), Springer-Verlag, Berlin, 2013.

Robert Altmann *ist wissenschaftlicher
Mitarbeiter für numerische Analysis an
der Technischen Universität Berlin.*

Jan Heiland *ist Postdoc für angewandte
Mathematik und forscht am
Max-Planck-Institut für Dynamik
komplexer technischer Systeme
Magdeburg.*

Mathematische Gebiete
Numerik und Wissenschaftliches
Rechnen

Verbindungen zu anderen Gebieten
Ingenieurwissenschaften und Technik

Lizenz
Creative Commons BY-SA 4.0

DOI
10.14760/SNAP-2016-007-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es begann als Teil des Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung gefördert wird. Das Projekt wurde auch von der Oberwolfach Stiftung sowie vom MFO unterstützt. Alle Schnappschüsse können unter www.imaginary.org/snapshots sowie unter www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

Editorin
Sabiha Tokus
junior-editors@mfo.de

Chefeditorin
Carla Cederbaum
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



Klaus Tschira Stiftung
gemeinnützige GmbH



oberwolfach
FOUNDATION

IMAGINARY
open mathematics