Schnappschüsse moderner Mathematik
aus Oberwolfach

№ 11/2022

Charakterisierungen von inneren Volumina auf konvexen Körpern und konvexen Funktionen

Fabian Mussnig [1]

Wenn wir die Größe einer zweidimensionalen Form mittels einer Zahl ausdrücken wollen, dann denken wir gewöhnlich an ihren Flächeninhalt oder ihren Umfang. Aber was macht diese Kennzahlen so besonders? Wir beantworten diese Frage anhand klassischer mathematischer Resultate und werfen einen Blick auf Anwendungen und Verallgemeinerungen dieser Theorie.

1 Was zeichnet Flächeninhalt und Umfang aus?

Wenn wir ein Objekt im zweidimensionalen Raum betrachten, so gibt es mehrere Zahlen, die wir ihm zuordnen können, um auszudrücken, wie groß es ist oder um seine Größe zu messen. Der übliche Flächeninhalt und der Umfang gehören wahrscheinlich zu den ersten Kenngrößen, die uns in den Sinn kommen. Aber was macht diese Maße so besonders?

Im Folgenden werden wir diese Frage für sogenannte *konvexe Körper* beantworten. Das sind Mengen, die sowohl *konvex* als auch *kompakt* sind. Eine Menge K ist konvex, wenn für zwei beliebige Punkte $x, y \in K$ auch das Liniensegment, welches x und y verbindet, innerhalb von K liegt, siehe Abbildung 1. Kompakt bedeutet, dass die Menge beschränkt und abgeschlossen ist, das heißt,

[1] Fabian Mussnig wird zum Teil vom österreichischen Wissenschaftsfonds (FWF) unterstützt: J 4490-N.

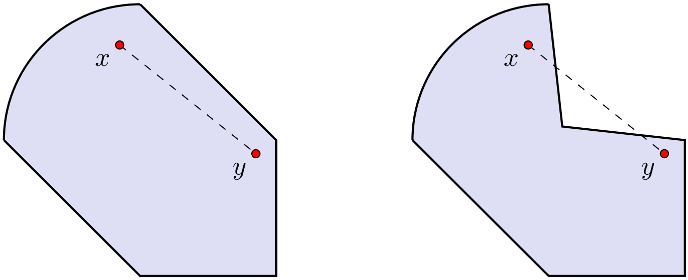

Abbildung 1: Die Menge auf der linken Seite ist konvex. Die Menge auf der rechten Seite ist nicht konvex, da die Verbindungslinie zwischen x und y nicht in der Menge liegt.

sie ist nicht unendlich groß und der Rand ist Teil der Menge. Früher wurden konvexe Körper auch als *Eikörper* bezeichnet. In der Tat sind Eier in der Regel (dreidimensionale) konvexe Körper, aber nicht jeder konvexe Körper sieht zwangsläufig wie ein Ei aus.

1.1 Eine Charakterisierung des Flächeninhalts

Beginnen wir mit dem Flächeninhalt. Offensichtlich ändert sich der Flächeninhalt eines konvexen Körpers nicht, wenn wir ihn in der zweidimensionalen Ebene verschieben. Wir sagen daher, dass der Flächeninhalt *translationsinvariant* ist. Wir können einen Körper auch drehen, ohne seinen Flächeninhalt zu verändern. Weniger offensichtlich ist, dass wir einen Körper sogar in eine Richtung dehnen und in eine andere Richtung stauchen können, ohne dass sich sein Flächeninhalt

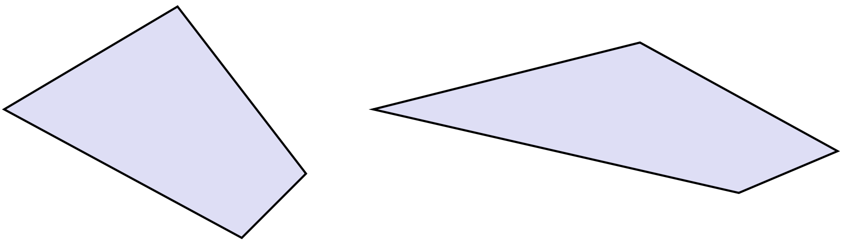

Abbildung 2: Die ursprüngliche Menge auf der linken Seite wird in horizontal gestreckt und in vertikal gestaucht, um die Menge auf der rechten Seite zu erhalten. Beide Mengen haben den gleichen Flächeninhalt, aber die rechte Menge hat einen größeren Umfang.

ändert, siehe Abbildung 2. In der Mathematik werden diese Operationen an einem Körper als *spezielle lineare Transformationen* bezeichnet. Diese werden durch Matrizen mit Determinante 1 dargestellt.[2] Wir sagen also, dass der Flächeninhalt SL(2)-*invariant* ist, wobei SL(2) für die Gruppe der speziellen linearen Transformationen im zweidimensionalen Raum steht.

Eine weitere Eigenschaft des Flächeninhalts ist, dass er *stetig* ist. Das heißt, wenn wir einen Körper geringfügig verändern, dann bewirkt dies auch nur eine kleine Änderung seines Flächeninhalts.[3] Nicht zuletzt ist der Flächeninhalt eine *Bewertung*. Das bedeutet, wenn wir zwei konvexe Körper K und L nehmen, dann gilt

$$\mathrm{A}(K \cap L) + \mathrm{A}(K \cup L) = \mathrm{A}(K) + \mathrm{A}(L),$$

wobei A für den Flächeninhalt steht. Hier bezeichnen $K \cap L$ die Schnittmenge und $K \cup L$ die Vereinigung der Körper K und L.[4] Wir veranschaulichen dies in Abbildung 3. In gewisser Weise misst der Flächeninhalt also Objekte.

Im Jahr 1937 beantwortete Wilhelm Blaschke (1885–1962) folgende Frage: Was sind alle stetigen, SL(2)- und translationsinvarianten Bewertungen auf konvexen Körpern? Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass der Flächeninhalt eine solche Bewertung ist. Aber es gibt auch einen sehr trivialen Kandidaten, nämlich dass wir jedem konvexen Körper die Zahl 1 zuordnen. Dies wird auch als *Euler-Charakteristik* bezeichnet. Blaschkes Antwort in [1]

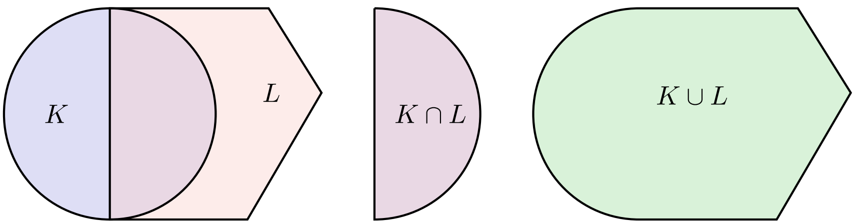

Abbildung 3: Zwei konvexe Körper K and L, ihre Schnittemenge $K \cap L$ and ihre Vereinigung $K \cup L$.

[2] Die Determinante einer Matrix ist eine Zahl, welche wichtige Informationen über die von der Matrix dargestellte Abbildung enthält. Siehe, zum Beispiel, https://de.wikipedia.org/wiki/Determinante.

[3] Um dies zu präzisieren, müssten wir die Topologie auf der Menge der konvexen Körper angeben, welche durch die Hausdorff-Metrik gegeben ist. Für volldimensionale Körper ist diese auch äquivalent zur symmetrischen Differenzen-Metrik, d.h. des Flächeninhalts (oder allgemeiner: dem n-Volumen) der symmetrischen Differenz.

[4] Wenn wir von Bewertungen auf konvexen Körpern sprechen, müssen wir normalerweise verlangen, dass auch $K \cup L$ wieder konvex ist. Alle Bewertungen in diesem Artikel können jedoch auf endliche Vereinigungen von konvexen Körpern ausgedehnt werden.

war, dass jede Bewertung auf konvexen Körpern in der Ebene entweder ein Vielfaches des Flächeninhalts (wenn man zum Beispiel einem Körper seinen vierfachen Flächeninhalt zuordnet ist dies auch eine Bewertung), ein Vielfaches der Euler-Charakteristik oder eine Summe dieser Ausdrücke ist. Wenn wir also $\mathcal{K}^2$ für die Menge der konvexen Körper in der Ebene schreiben, dann besagt Blaschkes Resultat, dass jede stetige, SL(2)- und translationsinvariante Bewertung $\mathrm{Z} : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ von der Form

$$\mathrm{Z}(K) = c_0 + c_1 \, \mathrm{A}(K) \tag{1}$$

ist, wobei $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Das bedeutet, dass Z eine Linearkombination der Euler-Charakteristik und des Flächeninhalts ist. Umgekehrt ist jeder Ausdruck der Form (1) eine stetige, SL(2)- und translationsinvariante Bewertung. Das bedeutet auch, dass Blaschke zeigen konnte, was den Flächeninhalt so besonders macht. Denn abgesehen von dem sehr trivialen Beispiel der Euler-Charakteristik ist er im Wesentlichen die einzige stetige, SL(2)- und translationsinvariante Bewertung auf $\mathcal{K}^2$.

1.2 Eine Charakterisierung des Umfangs

Als nächstes wollen wir über den Umfang sprechen. Er ist eindeutig translationsinvariant. Er ist auch invariant unter Rotationen, aber nicht unter der größeren Gruppe der speziellen linearen Transformationen, siehe wieder Abbildung 2. Der Umfang ist ebenfalls stetig und es stellt sich heraus, dass er auch eine Bewertung ist (an dieser Stelle ist es vielleicht eine gute Idee, noch einmal einen Blick auf Abbildung 3 zu werfen).

Wie zuvor können wir uns fragen, wie alle stetigen, rotations- und translationsinvarianten Bewertungen auf konvexen Körpern aussehen. Man beachte, dass diese Frage der von Blaschke sehr ähnlich ist, mit dem Unterschied, dass SL(2)-Invarianz nun durch Rotationsinvarianz ersetzt wird.

Da spezielle lineare Transformationen mehr als nur Rotationen sind, bedeutet dies, dass die Rotationsinvarianz weniger restriktiv als die SL(2)-Invarianz ist. Wir erwarten daher, dass mehr Bewertungen diese Bedingungen erfüllen. In der Tat wissen wir bereits, dass nicht nur Linearkombinationen der Euler-Charakteristik und des Flächeninhalts, sondern auch der Umfang solche Bewertungen sind.

Tatsächlich konnte Hugo Hadwiger (1908–1981) in den 1950er Jahren in [4] zeigen, dass es keine weiteren Beispiele gibt. Hadwigers Charakterisierungssatz in der Ebene besagt, dass eine Abbildung $\mathrm{Z} : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ genau dann eine stetige, rotations- und translationsinvariante Bewertung ist, wenn es $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mathrm{Z}(K) = c_0 + c_1 \, \mathrm{U}(K) + c_2 \, \mathrm{A}(K). \tag{2}$$

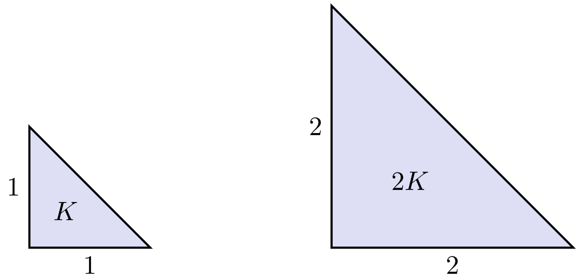

Abbildung 4: Skaliert man K mit 2, so wird sein Flächeninhalt mit $2^2 = 4$ multipliziert und sein Umfang ändert sich um den Faktor $2^1 = 2$.

Hierbei bezeichnet $\mathrm{U}(K)$ den Umfang von $K \in \mathcal{K}^2$. Wir können dieses Resultat nun weiter modifizieren, um getrennte Charakterisierungen der Euler-Charakteristik, des Umfangs und des Flächeninhalts zu erhalten, da sie unterschiedliche *Homogenitätsgrade* haben. Das bedeutet, wenn wir einen Körper K mit einem Faktor $\lambda > 0$ skalieren, dann ändert sich sein Flächeninhalt um einen Faktor λ^2. Also

$$\mathrm{A}(\lambda K) = \lambda^2 \,\mathrm{A}(K)$$

und wir sagen, dass der Flächeninhalt homogen vom Grad 2 ist. Gleichzeitig ändert sich der Umfang von K um λ^1 (der Umfang ist also homogen vom Grad 1), während sich die Euler-Charakteristik von K überhaupt nicht ändert, siehe Abbildung 4. Wir wissen nun also, dass der Umfang im Wesentlichen die einzige stetige, translations- und rotationsinvariante Bewertung ist, die homogen vom Grad 1 ist.

2 Höhere Dimensionen

Während wir bisher nur den zweidimensionalen Fall diskutiert haben, funktioniert alles, was wir oben geschrieben haben, auch im allgemeinen n-dimensionalen euklidischen Raum. In diesem Fall bleibt Blaschkes Resultat mehr oder weniger unverändert: Alle stetigen, $\mathrm{SL}(n)$- und translationsinvarianten Bewertungen auf konvexen Körpern in $\mathbb{R}^n$ sind durch Linearkombinationen der Euler-Charakteristik und des (n-dimensionalen) Volumens gegeben, welches die Verallgemeinerung des Flächeninhalts auf den n-dimensionalen Raum ist.

In Hadwigers Charakterisierungssatz für n Dimensionen erhalten wir jedoch Linearkombinationen von insgesamt $(n + 1)$ verschiedenen Abbildungen. Es handelt sich um die *inneren Volumina* $V_0, \dots, V_n$. Wir haben V_0 und V_n bereits kennengelernt: V_0 ist die Euler-Charakteristik und V_n ist das n-dimensionale

Volumen. Das heißt, wenn K ein zweidimensionaler Körper ist, dann ist $V_2(K)$ sein Flächeninhalt und wenn L ein dreidimensionaler Körper ist, dann ist $V_3(L)$ sein gewöhnliches Volumen.

Die inneren Volumina $V_1, \ldots, V_{n-1}$ bedürfen etwas mehr Erklärung. Wenn wir uns im zweidimensionalen Raum befinden, dann besagt Hadwigers Resultat, welches nun in Form von inneren Volumina formuliert ist, dass alle stetigen, rotations- und translationsinvarianten Bewertungen $\mathrm{Z} : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ von der Form

$$\mathrm{Z}(K) = d_0 V_0(K) + d_1 V_1(K) + d_2 V_2(K),$$

mit $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ sind. Wenn wir dies nun mit Gleichung (2) vergleichen und dabei berücksichtigen, dass $V_2(K) = \mathrm{A}(K)$ gilt, dann könnten wir vermuten, dass $V_1(K)$ proportional zum Umfang von K ist. In der Tat gilt $V_1(K) = \frac{1}{2}\,\mathrm{U}(K)$ für $K \in \mathcal{K}^2$. Im dreidimensionalen Raum ist $V_2(K)$ gleich der halben *Oberfläche* von $K \in \mathcal{K}^3$ und $V_1(K)$ ist proportional zur *mittleren Breite* von K. Für eine gründlichere Diskussion über innere Volumina verweisen wir auf den wunderschönen Schnappschuss von Liran Rotem [5].

3 Anwendungen

Werfen wir kurz einen Blick auf eine Anwendung von Hadwigers Charakterisierungssatz. Dazu betrachten wir einen konvexen Körper K im dreidimensionalen Raum. Wir platzieren eine Lichtquelle, die parallele Lichtstrahlen aussendet, auf einer Seite des Körpers und ein Blatt Papier auf der genau gegenüberliegenden Seite. Der Körper K wirft nun seinen Schatten auf das Blatt Papier und wir können den Flächeninhalt des Schattens messen, was in Abbildung 5 dargestellt ist. Wir wiederholen diese Konstruktion, indem wir die Lichtquelle aus allen möglichen Richtungen auf den Körper scheinen lassen (wobei wir das Blatt Papier jedes Mal auf der genau gegenüberliegenden Seite platzieren) und bilden den Durchschnitt der erhaltenen Schattenflächen.[5] Wir behaupten nun, dass wir soeben (bis auf einen festen multiplikativen Faktor) die Oberfläche von K berechnet haben. Woher wissen wir das?

Es stellt sich heraus, dass der Prozess, den wir gerade beschrieben haben (und der letztlich einem konvexen Körper eine Zahl zuweist), eine stetige, translations- und rotationsinvariante Bewertung ist. Diese ist zudem homogen vom Grad 2. Wenn wir nämlich den Körper K mit einen Faktor $\lambda > 0$ skalieren, dann skalieren wir auch seinen Schatten mit demselben Faktor und der Flächeninhalt des Schattens ändert sich um λ^2. Nach Hadwigers Charakterisierungssatz für

[5] Hier meinen wir wirklich alle möglichen Richtungen, was bedeutet, dass der Durchschnitt über eine unendliche Anzahl von Möglichkeiten gebildet wird. Formal wird dies mithilfe eines Integrals ausgedrückt.

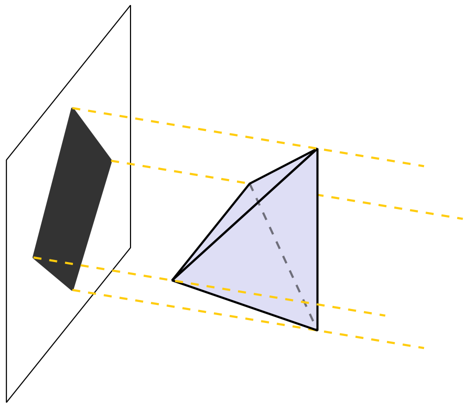

Abbildung 5: Ein konvexer Körper im dreidimensionalen Raum und sein Schatten. Die Lichtquelle, die sich rechts vom Körper befindet und parallele Lichtstrahlen aussendet, ist nicht dargestellt.

den dreidimensionalen Raum muss diese Bewertung also ein Vielfaches der Oberfläche sein. Diese alternative Methode zur Berechnung der Oberfläche eines konvexen Körpers ist auch als Cauchy'sche Oberflächenformel bekannt. Sie wurde zum ersten Mal etwa 100 Jahre, bevor Hadwiger seinen berühmtem Charakterisierungssatz bewiesen hat, gezeigt. Hadwigers Resultat liefert nicht nur eine schnelle Erklärung dafür, warum diese Formel wahr ist. Es ermöglicht es uns auch, andere, viel allgemeinere Formeln von ähnlicher Gestalt zu erhalten.

4 Von konvexen Körpern zu konvexen Funktionen

Als Nächstes wollen wir erörtern, wie wir innere Volumina und Bewertungen von konvexen Körpern auf *konvexe Funktionen* erweitern können. Grob gesagt ist eine reellwertige Funktion u auf $\mathbb{R}^n$ konvex, wenn die Fläche über ihrem Graphen eine konvexe Menge ist. Diese Idee ist in Abbildung 6 dargestellt. Wir werden auch zulassen, dass konvexe Funktionen den Wert $+\infty$ annehmen. Dies ermöglicht uns unter anderem, einen konvexen Körper K in $\mathbb{R}^n$ durch seine *Indikatorfunktion*

$$\mathrm{I}_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in K; \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu repräsentieren. Wir sehen, dass $\mathrm{I}_K : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn K eine konvexe Menge ist. Man kann dies selbst ganz einfach mit Indikatorfunktionen von Mengen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ überprüfen

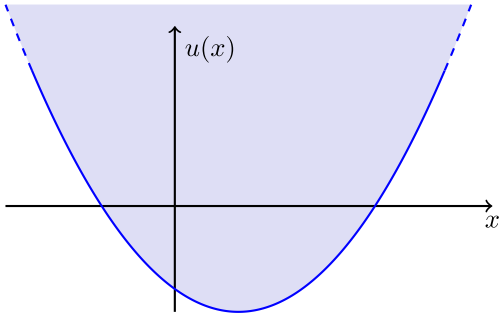

Abbildung 6: Die Fläche oberhalb des Graphen einer konvexen Funktion $u(x)$ ist eine unbeschränkte konvexe Menge.

(zumindest in den Fällen, in denen es möglich ist, den Graphen zu skizzieren). Unser Ziel ist es nun, Operatoren auf konvexen Funktionen zu finden, welche die inneren Volumina verallgemeinern. Das heißt, wenn wir einen solchen Operator auf die Indikatorfunktion eines konvexen Körpers K anwenden, dann wollen wir ein inneres Volumen von K erhalten.

4.1 Der eindimensionale Fall

Wir werden unsere Ideen im Fall $n = 1$ demonstrieren, was bedeutet, dass wir konvexe Funktionen $u : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ betrachten. Die konvexen Körper im eindimensionalen Raum sind Intervalle der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, und jeder solche Körper wird durch die konvexe Indikatorfunktion $\mathrm{I}_{[a,b]}$ repräsentiert, wie in Abbildung 7 dargestellt. Hadwigers Charakterisierungssatz beschreibt im eindimensionalen Fall zwei innere Volumina, die Euler-Charakteristik V_0 und die übliche *Länge* eines Intervalls, $V_1([a, b]) = b - a$. Die funktionale Version der Euler-Charakteristik ist leicht zu beschreiben: Wir weisen jeder konvexen Funktion einfach die Zahl 1 zu. Was ist mit der Länge?

Betrachtet man das Bild einer Indikatorfunktion $\mathrm{I}_{[a,b]}$, siehe Abbildung 7, so ist die Länge des Intervalls $[a, b]$ offensichtlich gleich der Länge des sichtbaren Graphen von $\mathrm{I}_{[a,b]}$. Aus der Integralrechnung wissen wir, dass die Länge des Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

gegeben ist, wobei die Herleitung dieser Formel in Abbildung 8 dargestellt ist. Ein naiver Ansatz ist also einfach

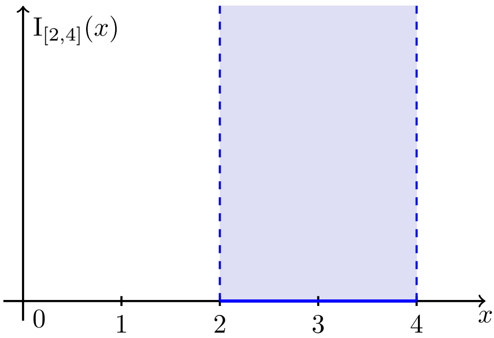

Abbildung 7: Die konvexe Indikatorfunktion $\mathrm{I}_{[2,4]}$ repräsentiert das Intervall $[2,4]$. Diese Funktion ist $+\infty$, wenn ihr Argument kleiner als 2 oder größer als 4 ist. Zur besseren Veranschaulichung ist der Bereich oberhalb des Graphen von $\mathrm{I}_{[2,4]}$ eingefärbt.

$$\mathrm{I}_{[a,b]} \mapsto \int \sqrt{1 + \big(\mathrm{I}'_{[a,b]}(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+0^2}\, \mathrm{d}x = b - a$$

zu betrachten, wobei wir nur über jene Punkte $x \in \mathbb{R}$ integrieren, an denen $\mathrm{I}_{[a,b]}(x)$ endlich (und damit differenzierbar) ist. Das heißt, wir integrieren nur über $x \in [a,b]$, für welche immer $\mathrm{I}'_{[a,b]}(x) = 0$ gilt. Wir können nun versuchen, dies zu verallgemeinern und eine Operation

$$u \mapsto \int \sqrt{1 + \big(u'(x)\big)^2}\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

für konvexe Funktionen $u : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ zu definieren. Nehmen wir aber zum Beispiel $u(x) = x^2$, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1 + 4\,x^2}\, \mathrm{d}x = +\infty.$$

In gewisser Weise ist dies zu erwarten, da der Graph dieser speziellen Funktion u unendlich lang ist. Das Problem ist jedoch, dass wir für jede Funktion eine endliche Zahl erhalten möchten, während wir für Indikatorfunktion noch immer die übliche Länge als Resultat bekommen wollen. Um dieses Problem zu lösen, schreiben wir zunächst (4) als

$$u \mapsto \int g\big(|u'(x)|\big)\, \mathrm{d}x$$

um, wobei $g(t) = \sqrt{1+t^2}$. Die Lösung besteht nun darin, g durch eine andere passende Funktion zu ersetzen. Diese Funktion muss also solche Eigenschaften

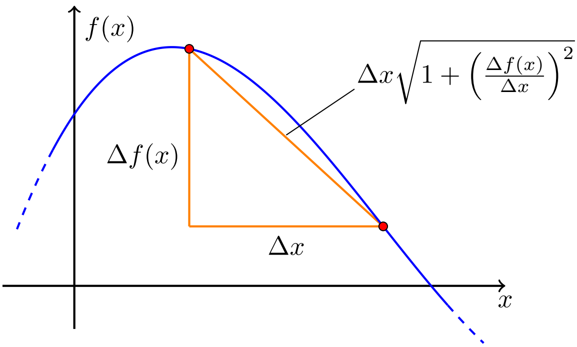

Abbildung 8: Wir verwenden den Satz des Pythagoras, um die Hypotenuse des Dreiecks zu berechnen. Wir approximieren den Graphen von f mit vielen solchen Dreiecken, verwenden Untersummen und lassen $\Delta x \to 0$, um (3) zu erhalten.

besitzen, die es uns ermöglichen, das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Wir betrachten daher

$$u \mapsto \int h\big(|u'(x)|\big)\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

wobei $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist. Das bedeutet, dass $h(t) = 0$ für jedes t größer einer festen positiven Zahl ist. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist in Abbildung 9 dargestellt. Wenn wir nun zusätzlich verlangen, dass unsere konvexen Funktionen „schnell genug nach $+\infty$ streben", ähnlich wie bei $u(x) = x^2$, dann kann man zeigen, dass das Integral in (5) immer endlich ist. Wenn wir außerdem u als Indikatorfunktion eines Intervalls $[a, b]$ wählen, dann erhalten wir

$$\int h\big(|\mathrm{I}'_{[a,b]}(x)|\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(0)\,\mathrm{d}x = h(0)(b-a).$$

Das bedeutet, dass wir für Indikatorfunktionen ein Vielfaches der üblichen Länge erhalten. Eine weitere Beobachtung ist, dass wir in (5) immer noch den gleichen Wert erhalten, wenn wir u so ändern, dass wir seinen Graphen nach oben, unten, links oder rechts verschieben. Das heißt, dass unsere Operation in einem funktionalen Sinne translationsinvariant ist. Wir können auch den Graphen von u an der vertikalen Achse spiegeln und erhalten immer noch denselben Wert für unsere Operation. Ohne ins Detail zu gehen, stellt sich heraus, dass (5) auch eine stetige Bewertung auf konvexen Funktionen ist. Wir haben also unsere funktionale Version des ersten inneren Volumens gefunden.

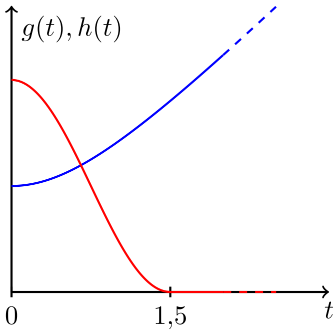

Abbildung 9: Die blaue Funktion ist $g(t) = \sqrt{1+t^2}$. Die rote Funktion $h(t)$ hat kompakten Träger und $h(t) = 0$ für jedes $t \geq 1{,}5$.

Das Hauptresultat von [2] für den Fall $n = 1$ besagt nun, dass jede stetige, spiegelungs- und translationsinvariante Bewertung Z auf konvexen Funktionen $u : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$, die „schnell genug nach $+\infty$ streben", von der Form

$$\mathrm{Z}(u) = c + \int h\big(|u'(x)|\big)\,\mathrm{d}x$$

ist, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger ist. Dies stellt eine funktionale Version von Hadwigers Charakterisierungssatz dar.

4.2 Höhere Dimensionen und Anwendungen

Was wir oben beschrieben haben, funktioniert auch in höheren Dimensionen. Die funktionale Version des n-dimensionalen Volumens ist dann von der Gestalt

$$u \mapsto \int h\big(\|\vec{\nabla} u(x)\|\big)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $u : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ konvex und $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ wiederum stetig mit kompaktem Träger ist. Dabei ist $\vec{\nabla} u(x)$ der *Gradient* der Funktion u im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, also ein Vektor, der einfach gesagt als eine höherdimensionale Version der üblichen Ableitung beschrieben werden kann. Der Ausdruck $\|\vec{\nabla} u(x)\|$ steht für die *Norm* oder *Länge* dieses Vektors. Für $n > 1$ finden wir auch neue Operatoren auf konvexen Funktionen, welche die inneren Volumina $V_1, \dots, V_{n-1}$ verallgemeinern. Diese Operatoren verwenden jedoch zweite Ableitungen und sind wesentlich komplizierter zu beschreiben, sodass wir die Details weglassen. Auch hier wurde eine Charakterisierung dieser Operatoren, ähnlich zu Hadwigers Charakterisierung der inneren Volumina auf konvexen Körpern, in [2] gefunden.

Abschließend sei erwähnt, dass sich diese neuen funktionalen inneren Volumina in vielerlei Hinsicht wie die klassischen inneren Volumina verhalten. Insbesondere kann das neue funktionale Hadwiger-Theorem verwendet werden, um eine funktionale Version der Cauchy'schen Oberflächenformel zu erhalten [3], welche ihr klassisches Gegenstück verallgemeinert.

Bildquellen

Alle Abbildungen wurden vom Autor erstellt.

Literatur

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie. H. 2*, Hamburger mathematische Einzelschriften 22, 1937.

[2] A. Colesanti, M. Ludwig und F. Mussnig, *The Hadwiger theorem on convex functions. I*, arXiv:2009.03702, 2020.

[3] ———, *The Hadwiger theorem on convex functions. II*, arXiv:2109.09434, 2021.

[4] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 93, Springer, 1957.

[5] L. Rotem, *Mixed volumes and mixed integrals*, Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach 14/2018, https://publications.mfo.de/handle/mfo/1400.

Fabian Mussnig *ist Universitätsassistent (Postdoc) an der TU Wien, Österreich.*

Mathematische Gebiete
Analysis, Geometrie und Topologie

DOI
10.14760/SNAP-2022-011-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach bieten spannende Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung. Sie werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Die Schnappschüsse haben zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der interessierten Öffentlichkeit weltweit zu fördern. Alle Schnappschüsse werden in Kooperation mit der IMAGINARY Onlineplattform veröffentlicht und können unter www.imaginary.org/snapshots sowie www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

ISSN 2626-1995

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9 – 11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Mitglied der Leibniz Gemeinschaft

IMAGINARY
open mathematics