Schnappschüsse moderner Mathematik
aus Oberwolfach

№ 9/2015

Wie man einen Sieger wählt: die Mathematik der Sozialwahl

Victoria Powers

Angenommen, eine Gruppe von Einzelpersonen möchte unter verschiedenen Optionen wählen, zum Beispiel einen von mehreren Kandidaten für ein politisches Amt oder den besten Teilnehmer einer Eiskunstlaufmeisterschaft. Man könnte fragen: Was ist die beste Methode, einen Sieger in *dem* Sinne zu wählen, dass er die individuellen Präferenzen der Gruppenmitglieder am besten widerspiegelt? Wir werden anhand einiger Beispiele sehen, dass viele Wahlverfahren, die weltweit in Gebrauch sind, zu Paradoxa und nachgerade schlechten Ergebnissen führen können, und wir werden uns ein mathematisches Modell von Gruppenentscheidungen ansehen. Wir diskutieren das *Unmöglichkeitstheorem von Arrow*, das Folgendes besagt: Hat man mehr als zwei Wahlmöglichkeiten, dann gibt es in einem ganz exakten Sinn **keine** gute Methode für die Wahl eines Siegers.

Dieser Snapshot ist eine Einführung in die Theorie der Sozialwahl, das heißt, die Untersuchung von kollektiven Entscheidungsprozessen und -verfahren. Beispiele für derartige Situationen sind u.a. gegeben durch

- Abstimmungen und Wahlen,
- Ereignisse, bei denen ein Sieger von Richtern gewählt wird, wie etwa beim Eiskunstlauf,
- Das Ranking von Sportmannschaften durch Experten,
- Gruppen von Freunden, die sich für einen Restaurant- oder einen Filmbesuch entscheiden.

Wir beginnen mit zwei Beispielen, von denen eines aus dem wirklichen Leben stammt, das andere hingegen erfunden ist.

Beispiel 1. Bei den Gouverneurswahlen 1998 in Minnesota gab es drei Kandidaten: den Republikaner Norm Coleman, den Demokraten Skip Humphrey und den unabhängigen Kandidaten Jesse Ventura. Ventura hatte nie ein gewähltes Amt inne, tatsächlich war er ein Profi-Wrestler. Das Wahlverfahren war die so genannte Mehrheitswahl: Jeder Wahler wählt einen Kandidaten und es gewinnt derjenige Kandidat, der die meisten Stimmen auf sich vereint. Ventura wurde mit 37% der Stimmen zum Gouverneur gewählt, Coleman erhielt 35% und Humphrey 28%. Andererseits schien es auf der Grundlage der nach der Wahl erfolgten Nachfragen so zu sein, dass fast alle Wähler, die für Coleman stimmten, Humphrey an die zweite Stelle setzten, während fast alle, die für Humphrey stimmten, Coleman an zweiter Stelle bevorzugten. Mit anderen Worten: Ventura gewann die Wahl, obwohl ihn fast zwei Drittel der Wähler an die letzte Stelle setzten. Ausserdem setzte ungefähr die Hälfte derjenigen, die für Ventura stimmten, Coleman an die zweite Stelle, während ungefähr die Hälfte den Kandidaten Humphrey an die zweite Stelle setzte. Das bedeutet: Hätte die Wahl nur zwischen Coleman und Humphrey oder nur zwischen Coleman und Ventura stattgefunden, dann hätte Coleman in beiden Fallen gewonnen. Die Wähler bevorzugten Coleman gegenüber den anderen beiden Kandidaten, aber dennoch verlor er die Wahl!

Ein Problem des Mehrheitswahlsystems besteht darin, dass es nur begrenzte Informationen über die Präferenzen der Wähler liefert. Wir können mehr Informationen erhalten, wenn wir den Wählern gestatten, für die Kandidaten ein Ranking anzugeben, statt lediglich einen bevorzugten Kandidaten auszuwählen. Ein Wahlverfahren, das die Präferenzen der Wähler berücksichtigt, ist nach dem französischen Mathematiker, Physiker, Politwissenschaftler und Seemann Jean-Charles de Borda (1733-1799) als *Borda-Wahl* bekannt. Wir geben hierzu ein Beispiel.

Beispiel 2. Die Schüler Johannes, Christoph und Monika konkurrieren in einer Schule um den Titel Bester Mathematik-Schüler. Die 24 Lehrer der Schule ordnen die Schüler in jeweils einer Rangliste vom besten bis zum schlechtesten ein, und die Schüler erhalten Punkte auf der Grundlage dieser Einstufungen:

Für einen ersten Platz gibt es 2 Punkte, für einen zweiten Platz 1 Punkt und andernfalls gibt es 0 Punkte. Hier sind die Rankings:

Ranking			Anzahl der Lehrer
1. Monika	2. Christoph	3. Johannes	11
1. Christoph	2. Johannes	3. Monika	7
1. Johannes	2. Christoph	3. Monika	3
Weitere Rankings			0

Wir zählen jetzt die Punkte, die jeder Schüler erhält. Monika bekommt $2 \times 11 = 22$ Punkte, Christoph kriegt $(2 \times 7) + 11 + 3 = 28$ Punkte und Johannes $(2 \times 3) + 7 = 13$ Punkte. Christoph wird zum Sieger erklärt, obwohl mehr als Hälfte der Lehrer Monika auf den ersten Platz setzte. Man beachte: Wäre gemäß dem Mehrheitswahlsystem nur über den ersten Platz abgestimmt worden, dann hätte Monika gewonnen.

1 Das Modell der Sozialwahl

Wir sind an Situationen interessiert, in denen eine Gruppe eine Wahl trifft, die auf den Präferenzen der Einzelpersonen der Gruppe basiert. Wir nehmen an, dass es für die Gruppe eine endliche Anzahl von Wahlmöglichkeiten gibt und dass jede Person der Gruppe eine Präferenz unter diesen Wahlmöglichkeiten hat, das heißt, die Einzelpersonen ordnen die Wahlmöglichkeiten jeweils in einer Rangliste von der ersten (der bevorzugtesten) bis zur letzten (am wenigsten bevorzugten) Stelle an. Wir nehmen an, dass die Einzelpersonen strikte Präferenzen haben, das heißt, in den jeweiligen Ranglisten gibt es keine gleichen Stimmenzahlen. Ein Sozialwahlverfahren ist ein Verfahren zur Bestimmung einer Gruppenpräferenz auf der Grundlage der individuellen Präferenzen. In der Gruppenpräferenz werden wir gleiche Stimmenzahlen zulassen. Wir wollen diese Aussagen nun präzise fassen.

- Wir haben eine endliche Menge von n Wählern und eine endliche Menge X von k *Wahlmöglichkeiten* oder *Kandidaten*.
- Es sei $L(X)$ die Menge sämtlicher *Präferenzlisten*, das heißt, die Menge aller möglichen strikten linearen Ordnungen[1] der Wahlmöglichkeiten X. Es sei $O(X)$ die Menge aller möglichen linearen Ordnungen von X (gleiche Stimmenzahlen sind zulässig).
- Ein *Profil* oder eine *Wahl* ist ein Element des kartesischen Produktes $L(X)^n$, das heißt, ein Profil ist eine Menge von n Präferenzlisten, wobei jeder Wähler eine solche Liste hat.

[1] Eine *lineare Ordnung* ist eine Verallgemeinerung der „kleiner als - grösser als“ Relation auf die reellen Zahlen. *Strikt* bedeutet, dass keine Gleichheit zugelassen ist.

- Eine *Sozialwahlfunktion* oder ein *Abstimmverfahren* ist eine Funktion $F : L(X)^n \to O(X)$. Für ein gegebenes Profil $R \in L(X)^n$ wird das Bild $F(R)$ mitunter als *Sozialwahl* oder als *soziales Ranking* bezeichnet..

Beachten Sie, dass eine Sozialwahl eine Rangliste von Wahlmöglichkeiten ist (wobei gleiche Stimmenzahlen möglich sind). Meistens interessieren uns nur die Wahlmöglichkeiten für den Spitzenplatz bzw. die Spitzenplätze dieser Liste der sozialen Präferenzen. Die Spitzenposition(en) bezeichen wie als den (die) *Sieger*.

In Beispiel 2 ist die Borda-Wahl das Sozialwahlverfahren, und wir haben $n = 24$ (Lehrer), $k = 3$ (Kandidaten) und $L(X)$ ist die Menge der sechs möglichen Präferenzlisten. Die Funktion F liefert den Kandidaten mit der höchsten Gesamtpunktzahl (Christoph).

Beispiele für Sozialwahlverfahren:

1. *Mehrheitswahl (Plurality).* Vgl. Beispiel 1. Die Kandidaten werden gemäß der Anzahl ihrer Ranglisten-Spitzenplätze eingestuft, das heißt, der (die) Sieger ist (sind) derjenige (diejenigen) Kandidat(en) mit den meisten Ranglisten-Spitzenplätzen. Dieses Verfahren wird bei vielen Wahlen angewendet, zum Beispiel bei vielen Kommunalwahlen und Bundesstaatswahlen in den USA. Mit diesem Verfahren erfolgt auch die Wahl der Hälfte der Sitze im Deutschen Bundestag.
2. *Anti-Mehrheitswahl (Antiplurality).* Es gewinnt derjenige Kandidat, der in den Ranglisten am wenigsten oft als Letzter eingestuft worden ist; dabei werden die Kandidaten vom letzten bis zum ersten Platz auf der Grundlage der Anzahl der letzten Plätze eingestuft, die sie in den Ranglisten erhalten.
3. *Borda-Wahl (Borda count).* Das ist das Verfahren von Beispiel 2. Bei k Kandidaten werden $k-1$ Punkte für das höchste Ranking vergeben, $k-2$ Punkte für das zweithöchste und so weiter. Die Kandidaten werden gemäß der Gesamtzahl der Punkte eingestuft, die sie erhalten. Der (Die) Kandidat(en) mit den meisten Punkten gewinnt (gewinnen). Diese Methode wird häufig bei sportbezogenen Abstimmungen verwendet.
4. *Instant runoff (Wahl mit sofortiger Stichwahl).* Der (Die) Kandidat(en) mit den wenigsten Höchsteinstufungen wird (werden) von jeder Präferenzliste gestrichen, so dass man eine neue Menge von Präferenzlisten für eine kleinere Menge von Kandidaten erhält. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis alle Kandidaten eliminiert sind. Die Sozialwahl erfolgt durch Auflisten der Kandidaten in der umgekehrten Reihenfolge, in der sie eliminiert worden sind. Diese Methode bei Wahlen in Australien und bei den Präsidentschaftswahlen in Irland angewendet.

Wir veranschaulichen diese Methode durch ein Beispiel:

Beispiel 3. Anne (A), Brigitte (B), Claus (C) und David (D) kandidieren für den Vorsitz eines Klubs mit 27 Mitgliedern. Die Präferenzlisten der 27 Wähler sind die Folgenden. Man beachte, dass es 24 mögliche Präferenzlisten gibt, aber in diesem Beispiel verwenden wir nur 4.

Präferenzliste	**Anzahl der Wähler**
$A \quad B \quad C \quad D$	12
$B \quad C \quad D \quad A$	7
$C \quad D \quad A \quad B$	5
$D \quad C \quad B \quad A$	3
Weitere Präferenzen	0

Bei der Mehrheitswahl ist Anne der Sieger, da sie die meisten höchstplazierten Stimmen hat. Bei der Anti-Mehrheitswahl hat Claus die wenigsten letztplatzierten Stellen und ist der Sieger. Wenden wir die Borda-Wahl an, dann hat Anne 41 Punkte, Brigitte 48 Punkte, Claus 47 Punkte und David 26 Punkte, das heißt, Brigitte siegt. Beim instant runoff wird David in der ersten Runde eliminiert, danach folgen Brigitte und schließlich Anne, folglich gewinnt Claus.

Dieses Beispiel zeigt, dass der Gewinn einer Wahl davon abhängen kann, für welches Wahlverfahren wir uns entscheiden! Ist das vernünftig?

2 Condorcet-Wahl und Condorcet-Sieger

Ein wichtiger Begriff der Sozialwahltheorie ist der *head-to-head contest* (Kopf-an-Kopf-Rennen). Wir nehmen an, dass eine Menge von Präferenzlisten gegeben ist. Im Fall von zwei Kandidaten A und B sagen wir, dass Kandidat A den Kandidaten B in einem head-to-head contest schlägt, wenn mehr Wähler A vor B einstufen als B vor A. Mit anderen Worten: Müssten die Wähler nur zwischen A und B wählen, dann würde A gewinnen. In Beispiel 1 würde Coleman in einem head-to-head contest gegen jeden der beiden anderen Kandidaten gewinnen.

Der französische Philosoph, Mathematiker und Politikwissenschaftler Marquis de Condorcet (1743–1794) befasste sich mit Wahlverfahren und veröffentlichte 1785 eine Arbeit, in der er das später nach ihm benannte Condorcet-Paradoxon behandelte. Er schrieb über den Begriff des head-to-head contests und damit zusammenhängende Begriffe.

Definition 1. Gegeben sei eine Wahl, das heißt, eine Menge von Präferenzlisten.

- Ein Kandidat, der alle anderen Kandidaten in einem head-to-head contest schlägt, wird *Condorcet-Sieger* genannt.
- Ein Kandidat, der gegen alle anderen Kandidaten in einem head-to-head contest verliert, wird *Condorcet-Verlierer* genannt.

- Ein Wahlverfahren erfüllt das *Condorcet-Sieger-Kriterium*, wenn es in denjenigen Fällen, in denen es einen Condorcet-Sieger gibt, dieser auch der einzige Wahlsieger ist.

In Beispiel 1 ist Coleman ein Condorcet-Sieger und Ventura ein Condorcet-Verlierer. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Mehrheitswahl das Condorcet-Sieger-Kriterium nicht erfüllt. In Beispiel 2 ist Monika ein Condorcet-Sieger. Dieses Beispiel zeigt, dass eine Borda-Wahl das Condorcet-Sieger-Kriterium nicht erfüllt.

3 Wahlverfahren, die das Condorcet-Sieger-Kriterium erfüllen

Das Condorcet-Sieger-Kriterium scheint eine ziemlich wünschenswerte Eigenschaft für Wahlsysteme zu sein: Gewinnt der Kandidat A alle head-to-head contests, dann scheint es vernünftig zu sein, dass A auch der Wahlsieger wird. Wir haben gesehen, dass die Mehrheitswahl und die Borda-Wahl das Condorcet-Sieger-Kriterium nicht erfüllen. Gibt es vernünftige Verfahren, die das Kriterium erfüllen?

Das Condorcet-Kriterium beruht auf den head-to-head contests, weswegen ein Weg zur sicheren Erfüllung des Condorcet-Sieger-Kriteriums darin besteht, einen siegerbasierten contest zu wählen. Bei einem *sequential pairwise voting* halten wir eine (beliebige) Anordnung der Kandidaten fest und führen danach entsprechend dieser festen Anordnung head-to-head contests zwischen den jeweiligen Kandidaten durch. Der Sieger des contest zwischen den ersten beiden Kandidaten tritt gegen den dritten Kandidaten an und so weiter, bis ein Kandidat überlebt. Man sieht leicht ein, dass dieses Verfahren das Condorcet-Sieger-Kriterium erfüllt, da ein Condorcet-Sieger jeden anderen auf der Liste schlägt.

Beispiel 4. Wir sehen uns Beispiel 3 unter einem anderen Blickwinkel an.

Präferenzliste	**Anzahl der Wähler**
$A \quad B \quad C \quad D$	12
$B \quad C \quad D \quad A$	7
$C \quad D \quad A \quad B$	5
$D \quad C \quad B \quad A$	3
Weitere Präferenzen	0

Beachten Sie, dass es in diesem Fall keinen Condorcet-Sieger gibt. Wir wollen nun ein sequential pairwise voting mit einer festen Anordnung $A\,B\,C\,D$ probieren. Im head-to-head contest zwischen A und B, bevorzugen 17 Wähler den Kandidaten A gegenüber B, während 10 Wähler den Kandidaten B gegenüber A

bevorzugen, das heißt, A gewinnt diesen contest. Setzen wir das Verfahren fort, dann sehen wir, dass C den Kandidaten A schlägt (15 zu 12) und schliesslich schlägt C den Kandidaten D (15 zu 12). Also wird C zum Sieger erklärt.

Verwenden wir die feste Anordnung $A\,C\,B\,D$, dann erkennen wir mühelos, dass B der Sieger ist. Nehmen wir $B\,C\,A\,D$, dann ist D der Sieger, und verwenden wir $B\,C\,D\,A$, dann ist A der Sieger.

Dieses Beispiel zeigt, dass es möglich ist, dass – in Abhängigkeit von der festen Anordnung, die wir wählen – ein beliebiger Kandidat gewinnen kann! Möglicherweise ist das sequential pairwise voting doch keine so gute Idee, obwohl das Condorcet-Sieger-Kriterium erfüllt ist.

Ein anderes Beispiel für eine Methode, die das Condorcet-Sieger-Kriterium erfüllt, wurde 1958 von dem Wirtschaftswissenschaftler Duncan Black vorgeschlagen. In Blacks Verfahren gilt: Existiert ein Condorcet-Sieger, dann ist dieser Kandidat der Sieger. Gibt es keinen Condorcet-Sieger, dann verwenden wir die Borda-Wahl, um einen Sieger auszuwählen. Wir könnten auch andere „hybride“ Verfahren definieren, in denen wir den Condorcet-Sieger wählen, wenn es einen solchen gibt, und irgendein anderes Verfahren nehmen, wenn es keinen Condorcet-Sieger gibt. Vielleicht ist ein hybrides Verfahren eine Möglichkeit, die gewährleistet, dass das von uns gewählte Verfahren vernünftige Eigenschaften hat.

4 Die Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen

Beispiel 5. 1995 wurde beim Eiskunstlauf der Frauen mithilfe des Abstimmverfahrens *best of majority* abgestimmt. Zwar gaben die Richter jeder Läuferin Punkte, aber diese Punkte wurden hauptsächlich dazu verwendet, für jeden Richter eine Präferenzliste zu erstellen. Bei der Eiskunstlauf-Weltmeisterschaft der Frauen 1995 geschah Folgendes. Als noch eine Läuferin laufen musste, waren die drei Erstplatzierten: 1. Chen Lu (China), 2. Nicole Bobek (USA) und 3. Suraya Bonaly (Frankreich). Die letzte Läuferin war Michelle Kwan aus den USA, die den 4. Platz belegt. Jedoch mussten aufgrund der Endresultate Nicole Bobek und Suraya Bonaly die Plätze wechseln, so dass Bonaly die Silbermedaille und Bobek die Bronzemedaille gewann. Obwohl also Kwan sowohl hinter Bobek als auch hinter Bonaly platziert war, führt Kwans Punktstand dazu, dass Bonaly in der Endbewertung vor Bobek platziert wurde. Intuitiv scheint es, dass die Frage, ob Bobek Bonaly schlägt oder nicht, unabhängig von der Leistung einer anderen Läuferin sein sollte. Der beschriebene Vorfall führte dazu, dass man das Abstimmverfahren im Eiskunstlauf änderte.

Das veranschaulicht eine andere Eigenschaft, die für Wahlsysteme vernünftig zu sein scheint. Wir sagen, dass ein Wahlverfahren die *Unabhängigkeit der* *irrelevanten Alternativen* erfüllt, wenn Folgendes gilt: Ist der Kandidat A bei einer Sozialwahl höher eingestuft als der Kandidat B und ändern einige Wähler ihre Präferenzlisten, wobei aber keiner der Wähler seine Präferenz zwischen A und B ändert, dann sollte A höher eingestuft bleiben als B. Mit anderen Worten: Die soziale Präferenz zwischen zwei Kandidaten sollte nur von den Präferenzen der Wähler zwischen A und B abhängen.

Beispiel 5 zeigt, dass die Methode, die bei der Eiskunstlaufweltmeisterschaft 1995 in der Bewertung angewendet wurde, die Bedingung der Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen nicht erfüllt. Der Leser kann sich davon überzeugen, dass die Mehrheitswahl und die Borda-Wahl die Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen erfüllen.

5 Monotonie

Beispiel 6. Wir nehmen an, dass 17 Mitglieder eines Klubs entscheiden möchten, welche Art Restaurant sie für ihr Jahresendabendessen wählen. Zur Diskussion stehen ein Thai-Restaurant, ein China-Restaurant, ein italienisches und ein deutsches Restaurant. Für die Wahl des Restaurants wenden sie das Instant-Runoff-Verfahren an. Nachstehend sind die Präferenzen der Klubmitglieder zu sehen.

Präferenzliste	**Anzahl der Wähler**
Thai China Italiener Deutsch	6
China Thai Italiener Deutsch	5
Italiener Deutsch China Thai	4
Deutsch Italiener Thai China	2
Weitere Präferenzen	0

Beim Instant Runoff wird das deutsche Restaurant als erstes eliminiert, dann folgen das chinesische und das italienische Restaurant, so dass das Thai-Restaurant der Sieger wäre. Vor der Abgabe der Stimmzettel kommt es jedoch zu einer hitzigen Debatte darüber, ob die thailändischen Speisen besser als die italienischen sind oder nicht. Die zwei Wähler, die der letzten Zeile entsprechen, entscheiden sich dafür, das Thai-Restaurant vor das italienische zu setzen, so dass ihre Präferenzlisten jetzt so aussehen: Deutsch Thai Italiener Chinese. Die Abstimmung erfolgt mit diesen neuen Präferenzlisten und man prüft leicht nach, dass die italienischen Speisen jetzt gewinnen.

Man beachte, was hier gerade geschehen ist: Die thailändische Küche ist in einigen Präferenzlisten nach oben gestiegen und wurde vom Sieger zum Verlierer!

Ein Wahlsystem ist monoton (oder erfüllt die *Monotonie-Bedingung*), wenn Folgendes gilt: Bewegen einige Wähler den Kandidaten A in ihren Präferenzlisten nach oben und wird A von keinem Wähler nach unten bewegt, dann kann sich

A in der endgültigen Rangliste nicht nach unten bewegen (Sozialwahl). Das obige Beispiel zeigt, dass das Instant-Runoff-Verfahren nicht monoton ist. Man sieht leicht ein, dass die Mehrheitswahl und die Borda-Wahl monoton sind.

6 Das Unmöglichkeitstheorem von Arrow

Der Wirtschaftswissenschaftler Kenneth Arrow (* 1921), suchte in den frühen 1950er Jahren nach einem Wahlverfahren, das „fair“ in dem Sinne ist, dass es Eigenschaften erfüllt wie diejenigen, die wir oben besprochen haben. Er fand jedoch kein geeignetes Wahlverfahren, sondern bewies schließlich, dass es kein solches System gibt. Für dieses Ergebnis und andere bedeutende Arbeiten erhielt Arrow 1971 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Einzelheiten seiner Arbeit findet man in einer Veröffentlichung aus dem Jahr 1951 [1].

Arrow gab eine Liste von fünf Bedingungen an, die in Wahlsystemen erfüllt sein sollten. Die meisten dieser Bedingungen haben wir oben diskutiert. Hier sind die Bedingungen von Arrow:

1. *Universalität (universality).* Die Wähler können jede mögliche Präferenz wählen.
2. *Positiver Zusammenhang zwischen sozialen und individuellen Werten.* Das ist die Monotonie-Bedingung, die wir in Abschnitt 5 besprochen haben.
3. *Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen.* Vgl. Abschnitt 4.
4. *Bürgersouveränitat (non-imposition).* Die Rangfolge der Kandidaten A und B wird den Wählern nicht aufgedrängt. Mit anderen Worten: Es gibt kein Paar von Kandidaten A und B derart, dass – unabhängig von den Präferenzlisten der Wähler – Kandidat A in der Sozialwahlordnung höher eingestuft wird als B.
5. *Nicht-Diktatur (nondictatorship).* Es gibt keinen Diktator, das heißt, es gibt keinen Wähler, dessen Präferenzliste das soziale Ranking vollständig determiniert.

Unmöglichkeitstheorem von Arrow *Gibt es mehr als zwei Kandidaten, dann kann kein Sozialwahlverfahren alle fünf Arrow-Bedingungen erfüllen.*

Arrows Theorem besagt also, dass es unmöglich ist, ein Sozialwahlverfahren zu finden, das angemessene Bedingungen erfüllt – alle Wahlverfahren sind notwendigerweise mangelhaft!

7 Jenseits von Arrows Theorem

Gemäß Arrows Theorem sind alle Sozialwahlverfahren mangelhaft, einschließlich der meisten, die weltweit bei politischen Wahlen verwendet werden. Nach der Veröffentlichung von Arrows berühmten Arbeiten haben zahlreiche Mathematiker, Wirtschaftswissenschaftler, Politikwissenschaftler und andere zu vielen Aspekten von Abstimmungsverfahren und zur Sozialwahl geforscht und publiziert.

In Bezug auf die Wahl von Siegern sind Methoden vorgeschlagen worden, die keine Sozialwahlverfahren sind. Ein Beispiel ist das *approval voting* (Wahl durch Zustimmung), bei dem die Wähler entscheiden, ob sie die einzelnen Kandidaten „billigen" oder nicht. Die soziale Präferenzordnung wird durch die Anzahl „Billigungen" bestimmt, die der Kandidat erhält. Diese Methode wird von der American Mathematical Society bei der Wahl von Mitgliedern des Vorstandsgremiums und anderer Führungspositionen angewendet. Eine andere Methode, die von M. Balinski und R. Laraki [2] vorgeschlagen wurde, wird *majority judgment* genannt. Bei diesem Verfahren teilen die Wähler die Kandidaten auf eine Weise ein, die sich in Abhängigkeit von der Situation ändern kann, und diese Einteilungen werden in spezifischer Weise aggregiert. Besteht das Ziel darin, einfach einen Sieger zu deklarieren, dann ist der Kandidat mit der höchsten Median-Einteilung (median grade)[2] der Sieger. Die Autoren argumentieren, dass dieses System einige der Probleme der traditionellen Sozialwahlverfahren vermeidet.

D. Saari, Professor für Mathematik und Volkswirtschaftslehre, hat eine Reihe von Büchern und Artikeln über Wahlsysteme geschrieben. In [6] verwendet Saari geometrische Methoden, um die Komplexitäten und die Paradoxa des Wählens zu untersuchen und zu erklären. In [8] schlug Saari folgende Abschwächung der Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen vor: Er berücksichtigt die *Intensität* der Wählerpräferenz zwischen zwei Kandidaten, wobei diese Intensität als die Anzahl derjenigen anderen Kandidaten definiert wird, die zwischen den beiden Kandidaten aufgelistet sind. Er definiert das *Kriterium der Intensität der binären Unabhängigkeit* (intensity of binary independence criterion) wie folgt: Ändern einige Wähler ihre Präferenzlisten, aber ändert keiner der Wähler seine Präferenz zwischen den Kandidaten A und B oder die Intensität seiner Präferenz, dann ändert sich auch das Ranking von A und B bei der Sozialwahl nicht. Saari zeigt, dass zum Beispiel die Borda-Wahl die Bedingungen des Arrow-Theorems erfüllt, wenn man die Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen durch die Intensität der binären Unabhängigkeit ersetzt.

Auch andere Fragen zur Sozialwahl sind untersucht worden, wie zum Beispiel Fragen zur Wahrscheinlichkeit dessen, dass ein spezielles Sozialwahlverfahren die Bedingung der Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen oder der Monotonie nicht erfüllt. Mit dieser Thematik hängt die *Condorcet-Effizienz* (Condorcet efficiency) eines speziellen Sozialwahlverfahrens zusammen: Ange-

[2] Werden alle Einteilungen in einer aufsteigenden Folge geordnet, dann ist die Median-Einteilung die in der Mitte befindliche Einteilung.

nommen, es gibt einen Condorcet-Sieger. Was ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der Condorcet-Sieger gewählt wird? Es gibt eine Möglichkeit, unterschiedliche Verfahren zu vergleichen. Für weitere Informationen zur Condorcet-Effizienz verweisen wir auf das Buch [3] von W. Gehrlein und F. Valgones.

8 Weitere Literaturangaben

Wir haben hier einige Aspekte der Sozialwahl und der wählenden Wahlsysteme nur kurz gestreift. Für diejenigen, die sich in diese Thematik vertiefen möchten, gibt es zahlreiche einführende Bücher, z. B. [4] und [5]. Zusätzlich zu den oben genannten Büchern von Saari empfehlen wir sein Buch [7], eine amüsante und interessante Einführung in diese Ideen.

Literatur

[1] K. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, John Wiley and Sons, 1951.

[2] M. Balinski und R. Laraki, *Majority Judgment*, MIT Press, 2010.

[3] W. Gehrlein und F. Valognes, *Condorcet Efficiency: A Preference for Indifference*, Social Choice and Welfare **18** (2001), Nr. 1, 193–205.

[4] J. Hodge und R. Klima, *The Mathematics of Voting and Elections: A Hands-On Approach*, American Mathematical Society, 2005.

[5] A. Pacelli und A. Taylor, *Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power, and Proof*, 2. Aufl., Springer-Verlag, 2008.

[6] D. Saari, *Basic Geometry of Voting*, Springer-Verlag, 1995.

[7] ———, *Chaotic Elections: A Mathematician Looks at Voting*, American Mathematical Society, 2001.

[8] ———, *Decisions and Elections: Explaining the Unexpected*, Cambridge University Press, 2001.

Victoria Powers *ist Professorin für Mathematik an der Emory University.*

Übersetzt aus dem Englischen von
Manfred Stern

Mathematische Gebiete
Diskrete Mathematik und Grundlagen

Verbindungen zu anderen Gebieten
Geistes- und Sozialwissenschaften

DOI
10.14760/SNAP-2015-009-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es begann als Teil des Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY", welches von der Klaus Tschira Stiftung gefördert wird. Das Projekt wurde auch von der Oberwolfach Stiftung sowie vom MFO unterstützt. Alle Schnappschüsse können unter www.imaginary.org/snapshots sowie unter www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

Editor/in
Sophia Jahns
junior-editors@mfo.de

Chefeditor/in
Carla Cederbaum
cederbaum@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9 – 11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor/in
Gerhard Huisken

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft
Klaus Tschira Stiftung gemeinnützige GmbH
KTS
oberwolfach FOUNDATION
IMAGINARY open mathematics