

Cutoff-Phänomen: Überraschendes Verhalten beim Kartemischen und bei weiteren Markovketten

Isabelle Baraquin • Nadia Lafrenière
Katharina Schuh

Dieser Schnappschuss vergleicht zwei Arten des Kartemischens und untersucht, wie lange es dauert einen “gut gemischten” Kartenstapel zu erhalten. Überraschenderweise kann das Mischverhalten auch für sehr ähnlich ausschauende Kartemischtechniken sehr unterschiedlich sein.

1 Mischen eines Kartenstapels

Vor dem Beginn eines Kartenspiels ist es wichtig, dass die Spielkarten gut gemischt werden. Aber wie lange dauert es, diese gut zu mischen? Selbstverständlich möchte man keinen geordneten Kartenstapel, da ansonsten leicht die nächste Karte erraten werden kann. Gleichzeitig möchte man auch nicht zu viel Zeit auf das Mischen des Kartenstapels verwenden. Dies führt zu der Frage:

Was ist die minimale Anzahl an Mischdurchgängen bis man eine zufällige Kartenreihenfolge erhält?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst die Größe des Kartenstapels und die Mischtechnik festlegen und genauer spezifizieren was es bedeutet, etwas zu erhalten, was dem Zufall nahe kommt.

Wir nehmen ein Standard-Kartenstapel mit 52 Karten und mischen diesen mit der bekannten *Überhand-Mischtechnik*, bei welcher eine kleinere Menge Karten von der einen Hand in die andere fallen gelassen wird. Ein Kartenstapel heißt *fast zufällig*, wenn alle möglichen Anordnungen an Karten beinahe gleich wahrscheinlich sind.

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, einem Teilgebiet der Mathematik, welche die Wahrscheinlichkeit wiederholter zufälliger Ereignisse misst, wissen wir, dass nicht alle Mischtechniken genügend effizient sind, um in der Praxis Verwendung zu finden: Das Überhand-Mischen benötigt zum Beispiel tausende Mischvorgänge, um einen gut gemischten Kartensatz mit 52 Karten zu erhalten.

Daher betrachten wir als nächstes eine weitere Kartenmischtechnik: Zunächst teilen wir den Kartenstapel in zwei kleinere Stapel von ungefähr der gleichen Größe auf. Dabei sind wir beim exakten Aufteilen in die zwei Stapel nicht zu genau, da wir hier gerne eine gewisse Zufälligkeit erzeugen möchten. ^[1] Wir nehmen je einen Block in eine Hand und verschachteln sie geschickt, sodass wir wieder einen einzigen Kartenstapel erhalten. Diese Technik, welche auch *Bogenmischen* (engl: *riffle shuffle*) genannt wird und sowohl von Hobbykartenspielern als auch von Croupiers im Kasino angewandt wird, ist dafür bekannt, sehr effizient zu sein, was bedeutet, dass wir weniger als zehnmal mischen müssen [2].

Beim Versuch, die Anzahl der notwendigen Mischwiederholungen zu bestimmen um eine zufällige Folge an Karten in unserem Stapel zu erhalten, schauen wir uns bestimmte Informationsstücke an, die eine Zufälligkeit anzeigen könnten. Im Fall des Bogenmischens bietet die Anzahl von *aufsteigenden Folgen* ein aussagekräftiges Kriterium. Aufsteigende Folgen sind Folgen von Karten, die benachbart und in einer gewissen Anordnung sind, und welche nach einem Mischvorgang weiterhin in dieser Anordnung sind (siehe Abbildung 1).

Typischerweise hat ein zufälliger Kartenstapel mit n Karten ungefähr $\frac{n}{2}$ aufsteigende Folgen und kann bis zu n solcher Folgen haben. Jedoch erzeugt ein einmaliger Mischvorgang des Kartenstapels nur zwei aufsteigende Folgen. In jedem Schritt wird die Anzahl der aufsteigenden Folgen höchstens verdoppelt. Somit benötigen wir, um alle möglichen Kombinationen für den Kartenstapel zu erhalten, (hypothetisch) mindestens n aufsteigende Folgen. Dies erhalten wir in $\log_2(n)$ Schritten (das ist die Häufigkeit der Schritte, die wir mit 2 multiplizieren müssen, um n zu erhalten). Das zeigt, dass wir mindestens $\log_2(n)$ Schritte

^[1] Mathematisch gesprochen teilen wir den Kartenstapel bezüglich einer Binomialverteilung. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, für den oberen Kartenstapel k Karten zu haben, die gleiche ist wie die Wahrscheinlichkeit k -mal Kopf zu werfen, wenn man so viele faire Münzwürfe durchführt, wie es Karten gibt.

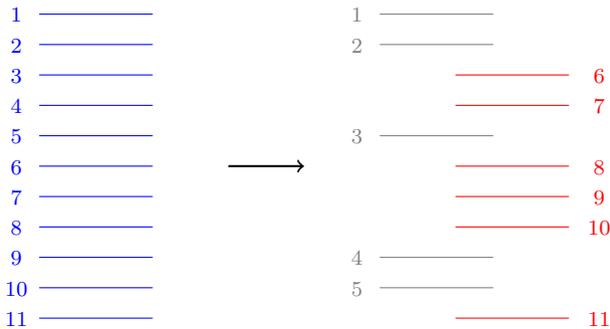


Abbildung 1: Für einen Kartenstapel mit elf Karten sind die aufsteigenden Folgen in zwei verschiedenen Spalten dargestellt, jede Spalte entspricht einer Hand im Bogenmischen. Nach einmal Mischen ist die Anordnung der Karten (1, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 4, 5, 11) und die aufsteigenden Folgen sind (1, 2, 3, 4, 5), in grau dargestellt, und (6, 7, 8, 9, 10, 11), in rot dargestellt. In jedem Mischschritt verdoppelt sich maximal die Anzahl der aufsteigenden Folgen.

benötigen, um einen gut gemischten Kartenstapel zu erhalten.

Im nächsten Abschnitt werden wir herausfinden, wie häufig wir den Kartensatz mischen müssen, um sehr wahrscheinlich etwas gut gemischtes zu erhalten.

Die richtige Anzahl von Mischdurchgängen

Das Bestimmen der Wiederholungen, welche notwendig sind, um einen gut gemischten Kartenstapel zu erhalten, ist stark mit dem Bestimmen, wie nahe ein solcher Stapel an einem perfekt gemischten Kartenstapel ist, verknüpft. Da die Verteilung der Karten im Stapel von Schritt zu Schritt zufälliger wird, können wir die Zufälligkeit als Funktion in Abhängigkeit zu der Anzahl der Iterationen angeben. Um diese Funktion zu berechnen, vergleichen wir die Wahrscheinlichkeit, dass jede Anordnung des Kartenstapels nach unserem Mischen auftritt, mit der Wahrscheinlichkeit, dass diese nach einem perfekten Mischen auftritt. Formal bezeichnen wir mit $\tau^t(\sigma)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Kartenstapel nach t Mischungen in einer gegebenen Anordnung σ ist. Darüber hinaus sei $\pi(\sigma)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der perfekt gemischte Kartenstapel die Anordnung σ hat (diese Wahrscheinlichkeit ist dieselbe für jede Anordnung). Dann wird die Zufälligkeit des Mischens durch die Verwendung der folgenden Summe über

alle möglichen Anordnungen berechnet:

$$d(t) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \text{ Anordnung}} |\tau^t(\sigma) - \pi(\sigma)|.$$

Diese Formel stellt die totale Variationsdistanz dar: Das ist eine Zahl zwischen 0 und 1, wobei 0 bedeutet, dass der Kartenstapel perfekt gemischt ist. Zu Beginn, wenn wir mit dem Mischen starten, ist die Funktion nahe bei 1. Diese Funktion ist in jedem Schritt, wie zu erwarten, fallend. Das heißt, dass das Kartenspiel in jedem Schritt besser gemischt wird. Der Kartenstapel ist genügend gemischt, wenn die totale Variationsdistanz unter einen bestimmten festgelegten (aber beliebigen) Wert, zum Beispiel $1/4$, fällt.

Wir haben $1/4$ gewählt, aber würden wir ein komplett anderes Ergebnis erhalten, wenn wir $1/3$ gewählt hätten? Für viele Mischtechniken ist die benötigte Anzahl an Wiederholungen des Mischprozederes, um eine totale Variationsdistanz von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ zu erhalten, sehr ähnlich. Daher ist der von uns gewählte Bruch nicht entscheidend, solange die gewählte Zahl kleiner als $1/2$ ist. Dies liegt an dem Auftreten des *Cutoff-Phänomens*, welches einen scharfer Abfall in der totalen Variationsdistanz beschreibt, wie in der Abbildung 2 zu sehen ist.

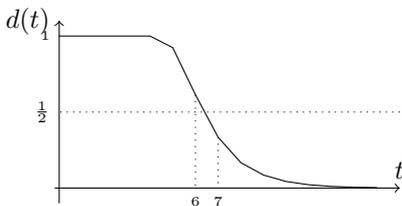


Abbildung 2: Die Abbildung der totalen Variationsdistanz weist einen Cutoff für das Bogenmischen eines Kartenstapels von 52 Karten auf. Nach 7 Wiederholungen des Mischens fällt die totale Variationsdistanz unter $\frac{1}{2}$, welches darauf hindeutet, dass 7 Wiederholungen ausreichend sind, um einen gut gemischten Kartenstapel zu erhalten.

Daher können wir unsere Aufmerksamkeit auf den Moment, wenn dieser scharfe Abfall auftritt, fokussieren: dieses kurze Zeitfenster, in welchem die Distanz von 1 nach 0 fällt und wir einen gut gemischten Kartenstapel erhalten, ist unabhängig von der beliebig gewählten Schranke.

Um das Cutoff-Phänomen im Detail zu untersuchen, führen wir das mathematische Kernstück dazu ein, die Markov-Kette, welche nach dem russischen Mathematiker Andrey Markov benannt ist.

2 Markov Ketten und Stationarität

Eine *Markov-Kette* ist ein stochastisches Modell, welches eine Abfolge von möglichen Ereignissen beschreibt, welche zu festen Zeiten passieren, wobei das Update eines Ereignisses nur vom aktuellen Ereignis abhängt, aber nicht von der Historie der vorherigen Ereignisse. Das Mischen eines Kartenstapels ist also eine Markov-Kette, da es ausreichend ist, die aktuelle Anordnung der Karten zu kennen, um die Entwicklung des Kartenmischens vorauszusagen. Die Kartenanordnungen vor dem letzten Mischen beeinflussen nicht die nachfolgende Anordnung.

Um die genauen Schritte der Markovkette zu illustrieren, und um unsere intuitive Idee eines gut gemischten Kartenstapels in mathematischen Termen zu formulieren, geben wir zunächst einen Namen für die Menge aller möglichen Anordnungen der 52 Karten: Wir nennen diese Menge den *Zustandsraum* S und jedes Element in dieser Menge einen *Zustand*. Die Zustände, das heißt, die Elemente der Menge aller Kartenanordnungen, repräsentieren jeweils eine Anordnung der 52 Karten. Insgesamt gibt es $|S| = 52 \cdot 51 \cdots 2 \cdot 1$ mögliche Zustände für einen Kartenstapel. ^[2]

Um den Prozess des Mischens zu formalisieren, geben wir zunächst ein Beispiel einer einfachen Markovkette mit nur drei Zuständen an, welche wir grafisch in Abbildung 3 illustrieren. Wir betrachten einen Zustandsraum S mit drei Zuständen a , b und c und den folgenden Regeln: Wenn die Kette sich aktuell im Zustand a befindet, dann bleibt sie in Zustand a mit Wahrscheinlichkeit $\pi(a, a) = 0.5$ und springt zum Zustand b beziehungsweise c mit Wahrscheinlichkeit $\pi(a, b) = 0.3$ beziehungsweise $\pi(a, c) = 0.2$. Wir bezeichnen mit $\pi(i, j)$ die *Übergangswahrscheinlichkeit* von einem Zustand i in einen Zustand j .

Analog sind die Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn die Kette sich im Zustand b oder c befindet, in Abbildung 3 gegeben. Insgesamt erhalten wir die Übergangsmatrix

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(a, a) & \pi(a, b) & \pi(a, c) \\ \pi(b, a) & \pi(b, b) & \pi(b, c) \\ \pi(c, a) & \pi(c, b) & \pi(c, c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

bei welcher alle Einträge zwischen 0 und 1 sind und die Summe aller Einträge einer Reihe 1 ergibt. Wir bemerken, dass der nächste Zustand nur vom aktuellen Zustand abhängt, aber nicht von den vorherigen. Diese Eigenschaft heißt *Gedächtnislosigkeit* und ist die charakterisierende Eigenschaft einer Markov-Kette.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kette X_0, X_1, X_2, X_3 , welche im Zustand a zum Zeitpunkt 0 startet ($X_0 = a$), zum Zeitpunkt eins den Wert b annimmt

^[2] Das Produkt $52 \cdot 51 \cdots 2 \cdot 1$ heißt "52 Fakultät", und kann mit 52! abgekürzt werden.

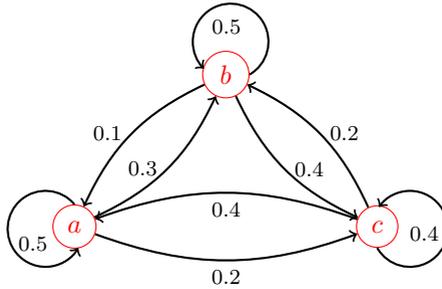


Abbildung 3: Beispiel: Übergangswahrscheinlichkeiten in einem System mit 3 Zuständen.

$(X_1 = b)$, gefolgt von $X_2 = a$ und $X_3 = c$, ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[X_0 = a, X_1 = b, X_2 = a, X_3 = c] = \pi(a, b)\pi(b, a)\pi(a, c).$$

Betrachten wir wieder die kompliziertere Markov-Kette, welche den Prozess des Mischens eines Kartens beschreib. Wir können die Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Mischtechnik analog berechnen. Allerdings ist auf Grund der $52!$ möglichen Kartenkombinationen die Übergangsmatrix mit $52! \times 52!$ Einträgen sehr groß. Wir werden sie hier nicht ausschreiben!

Als nächstes präzisieren wir, was wir mit dem Begriff eines 'gut gemischten Kartenstapels' meinen: in der wahrscheinlichkeitstheoretischen Sprache bedeutet das, dass die Markov-Kette sich in ihrer stationären Verteilung, beziehungsweise in einem geeigneten Sinne nahe an der stationären Verteilung befindet. Zu sagen, dass ein Kartenstapel "genügend zufällig" nach m Wiederholungen des Mischvorgangs ist, entspricht deshalb dem Bestimmen der Distanz zwischen den Verteilungen der Karten nach m Schritten der Markov-Kette und der stationären Verteilung, siehe Abschnitt 1.

In dem Beispiel mit der Markov-Kette mit drei Zuständen (siehe Abbildung 3) ist die stationäre Verteilung die uniforme Verteilung. Das heißt, alle Zustände treten nach einer langen Zeit mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. In Formeln heißt das, dass die Wahrscheinlichkeit den jeweiligen Zustand zu erreichen, von der Form $\mu(a) = \mu(b) = \mu(c) = 1/3$ ist (nach einer langen Zeit). Dies überprüfen wir mit Hilfe der Gleichung $\mu(a) = \mu(a)\pi(a, a) + \mu(b)\pi(b, a) + \mu(c)\pi(c, a)$, und analog für die Zustände b und c .

Damit ist die stationäre Verteilung für das Bogenmischen eins geteilt durch die Gesamtanzahl an möglichen Anordnungen für die Karten, welche wie oben beschrieben, $52!$ Möglichkeiten sind. In Formeln ergibt sich $\mu(x) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{52!}$ für alle Zustände $x \in S$. Es ist bekannt, dass unter milden Annahmen an

die Übergangsmatrix, eine Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum eine eindeutige stationäre Verteilung hat, siehe [5] für Details. Das Bewerten der Mischqualitäten des m -ten Schritts beim Mischen, oder bei einer anderen Markov-Kette entspricht dem Berechnen der Distanz zwischen der Verteilung nach m Schritten der Markov-Kette und ihrer stationären Verteilung.

3 Zwei Beispiele für Cutoff

Zusammenfassend können wir sagen, ein Cutoff tritt dann ein, wenn die Distanz zur stationären Verteilung (welche wir in der totalen Variationsdistanz angeben) für eine gewisse Anzahl an Schritten nahe bei eins ist und dann plötzlich abfällt und schnell gegen null konvergiert. Dieser Prozess ist jedoch sehr fragil: das Verändern der Regeln, wie das Abändern der Anfangsverteilung oder der Übergangsmatrix der Markov-Kette, kann den Cutoff zerstören.

Als nächstes betrachten wir zwei verschiedene Markov-Ketten, welche Werte in $\{0, 1, 3, \dots\}$ annehmen, und zwei verschiedene Verhalten aufweisen: das klassische Ehrenfest-Modell, und das modifizierte Ehrenfest-Modell, welche in Abbildung 4, beziehungsweise in Abbildung 5 visualisiert sind.

3.1 Das klassische Modell

Das Modell wurde von Paul Ehrenfest (1880–1933) und Tatyana Ehrenfest-Afanaseva (1876–1964) eingeführt, um das Diffundieren von Gasen zu studieren. Wir betrachten zwei Urnen und n Kugeln. Wir nehmen an, dass wir zu Beginn genau wissen, wo sich die Kugeln befinden. Dann wird zufällig in jedem Schritt eine Kugel aus allen Kugeln ausgewählt und in die andere Urne gelegt. Wenn wir zum Beispiel eine Kugel aus der ersten Urne auswählen, dann legen wir diese in die zweite Urne. Der Zustand der assoziierten Markovkette entspricht der Anzahl der Kugeln in der ersten Urne. Dieser Zustand verändert sich entweder von i zu $i - 1$, wenn die ausgewählte Kugel sich in der ersten Urne befindet (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\#\{\text{Kugeln in Urne 1}\}}{\#\{\text{Kugeln}\}} = \frac{i}{n}$), oder von i zu $i + 1$, wenn sich die ausgewählte Kugel in der zweiten Urne befindet (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\#\{\text{Kugeln in Urne 2}\}}{\#\{\text{Kugeln}\}} = \frac{n-i}{n}$).

3.2 Das modifizierte Modell

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Versuchsperson faul ist und manchmal die ausgewählte Kugel in der selben Urne belässt. Dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$. Das bedeutet, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nun

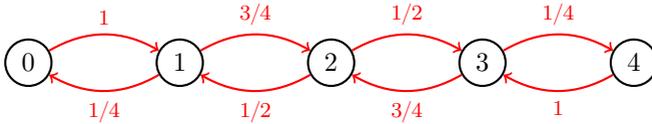


Abbildung 4: Darstellung der Markov-Kette assoziiert zu den Ehrenfest-Urnen, für $n = 4$ Kugeln.

von der Form

$$\pi(i, i - 1) = \frac{i}{n + 1} \quad \pi(i, i) = \frac{1}{n + 1} \quad \pi(i, i + 1) = \frac{n - i}{n + 1} \quad (1)$$

sind.

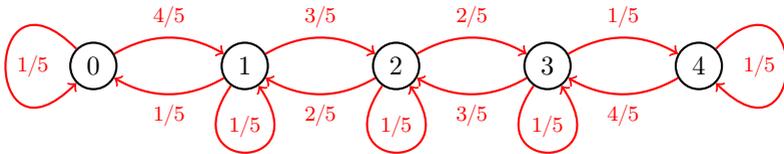


Abbildung 5: Darstellung der Markov-Kette assoziiert zu den modifizierten Ehrenfest-Urnen, für $n = 4$ Kugeln.

Im Jahr 1983 bewies David Aldous [1], dass diese Markov-Kette die gleiche stationäre Verteilung hat wie die zur klassischen Ehrenfest-Urne assoziierte Verteilung, und dass die Kette zur stationären Verteilung konvergiert. Darüber hinaus, zeigte er, unter der Annahme, dass zu Beginn alle Kugeln in der zweiten Urne sind, das Auftreten eines Cutoff^[3]. Das heißt, er beobachtete bei der Markovkette $(X_t)_t$ mit $X_0 = 0$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten (1) eine abrupte Konvergenz zur Stationarität wie in Abbildung 2.

Unter der Verwendung der gleichen Techniken zeigte Persi Diaconis, dass die Markov-Kette, die in $\frac{n}{2}$ startet, erstaunlicherweise keinen Cutoff hat, wie in [3] erklärt wird. Er betrachtete eine gerade Anzahl n an Kugeln und nahm an, dass sich zu Beginn $\frac{n}{2}$ Kugeln in jeder Urne befinden. In diesem Fall konvergiert die Markovkette $(Y_t)_t$, welche durch $Y_0 = \frac{n}{2}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten aus der obigen Formel (1) gegeben ist, zur stationären Verteilung, wie es in Abbildung 6 zu sehen ist.

^[3] Der Cutoff tritt zur Zeit $\frac{1}{4}n \log(n)$ auf.

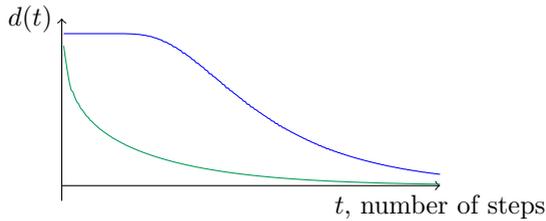


Abbildung 6: Distanz zwischen der Verteilung von X_t (in blau), beziehungsweise von Y_t (in grün), und der stationären Verteilung für $n = 100$. Der zufällige Prozess X_t weist im Gegensatz zu Y_t ein Cutoff auf.

4 Kriterium für Cutoff

Seitdem Aldous und Diaconis die Idee des Cutoff-Phänomens eingeführt haben, sind Mathematiker daran interessiert zu verstehen, für welche Markov-Ketten ein Cutoff-Phänomen auftritt. Unter der Verwendung verschiedener Ansätze ist das Problem für eine Vielzahl von Modellen, wie das Bogenmischen und die Ehrenfest-Urnen, beantwortet. Jedoch können, wie wir es für das Ehrenfest-Modell gesehen haben, schon kleine Veränderungen in dem Modell zu drastischen Veränderungen im Verhalten führen. Daher bleibt das Verstehen des allgemeinen Mechanismus, wann ein Cutoff auftritt, eine wichtige Frage, welches es uns erlauben würde, das Verhalten von neuen Modellen vorherzusagen ohne diese jeweils von vorne zu analysieren.

Mithilfe analytischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Techniken wurden verschiedene Versuche unternommen, ein Kriterium für Cutoff für eine Klasse von Markov-Ketten zu geben. Jedoch bieten diese Ansätze noch kein vollständiges Bild. Zum Beispiel wurde in [6] ein Cutoff für Markov-Ketten mit bestimmten geometrischen Eigenschaften, welche Irrfahrten auf bestimmten Graphen inkludiert, gezeigt. In [4] sind Techniken entwickelt worden, welche eine Cutoff-Bedingung für die Klasse der ‘schwachen asymmetrischen einfachen Ausschluss-Prozesse’ (engl: weakly asymmetric simple exclusion processes) bietet. Dies sind Teilchenprozesse auf einer Linie, welche mit leicht unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten nach links oder rechts springen. Diese Prozesse zeigen ein Cutoff-Phänomen wenn die Segmente der Linie feiner und feiner werden. In diesem Fall sind obere und untere Schranken für die Zeit, zu welchem das Modell sich dem Gleichgewicht annähert, analysiert worden.

Jedoch decken diese Ergebnisse nur einige Klassen von Markov-Ketten ab. In vielen Fällen kann man nur vermuten, ob ein Cutoff existiert. Daher fehlt immer noch ein allgemeines Kriterium, welches für alle Markov-Ketten anwendbar ist und das Problem bleibt für die Zukunft weiter ungelöst.

5 Danksagung

Wir bedanken uns bei Charles Bordenave, Persi Diaconis, Hubert Lacoïn und Justin Salez für das Organisieren eines Seminars zu dem Thema Cutoff-Phänomen für endliche Markov-Ketten und für die Möglichkeit, diesen Schnappschuss zu schreiben. Wir danken ebenfalls den Schnappschuss-Editoren für ihre hilfreichen Kommentare an diesem Text.

Literatur

- [1] David Aldous, *Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains*, Seminar on probability, XVII, Lecture Notes in Math., Bd. 986, Springer, Berlin, 1983, S. 243–297.
- [2] Dave Bayer und Persi Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, The Annals of Applied Probability **2** (1992), Nr. 2, 294–313, ISSN 1050-5164.
- [3] Persi Diaconis, *The cutoff phenomenon in finite Markov chains*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **93** (1996), Nr. 4, 1659–1664, ISSN 0027-8424.
- [4] Cyril Labbé und Hubert Lacoïn, *Mixing time and cutoff for the weakly asymmetric simple exclusion process*, Ann. Appl. Probab. **30** (2020), Nr. 4, 1847–1883, ISSN 1050-5164.
- [5] David A. Levin, Yuval Peres und Elizabeth L. Wilmer, *Markov chains and mixing times*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, ISBN 978-0-8218-4739-8, With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson.
- [6] Justin Salez, *Cutoff for non-negatively curved Markov chains*, To appear in Journal of European Mathematical Society (2023), arXiv:2102.05597.

Isabelle Baraquin *forscht am Laboratoire de mathématiques de Besançon.*

Mathematische Gebiete
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Nadia Lafrenière *ist Assistant Professor an der Concordia University.*

Verbindungen zu anderen Gebieten
Physik, Geistes- und Sozialwissenschaften

Katharina Schuh *ist PostDoc am Institut für Analysis und Scientific Computing der TU Wien.*

Lizenz
Creative Commons BY-SA 4.0

Übersetzt aus dem Englischen von
Katharina Schuh

DOI
10.14760/SNAP-2023-005-DE

Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach bieten spannende Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung. Sie werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Die Schnappschüsse haben zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der interessierten Öffentlichkeit weltweit zu fördern. Alle Schnappschüsse werden in Kooperation mit der IMAGINARY Onlineplattform veröffentlicht und können unter www.imaginary.org/snapshots sowie www.mfo.de/snapshots abgerufen werden.

ISSN 2626-1995

Editorin
Carina Geldhauser
junior-editors@mfo.de

Chefeditorin
Anja Randecker
senior-editor@mfo.de

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach gGmbH
Schwarzwaldstr. 9–11
77709 Oberwolfach
Deutschland

Direktor
Gerhard Huisken



Mathematisches
Forschungsinstitut
Oberwolfach



IMAGINARY
open mathematics